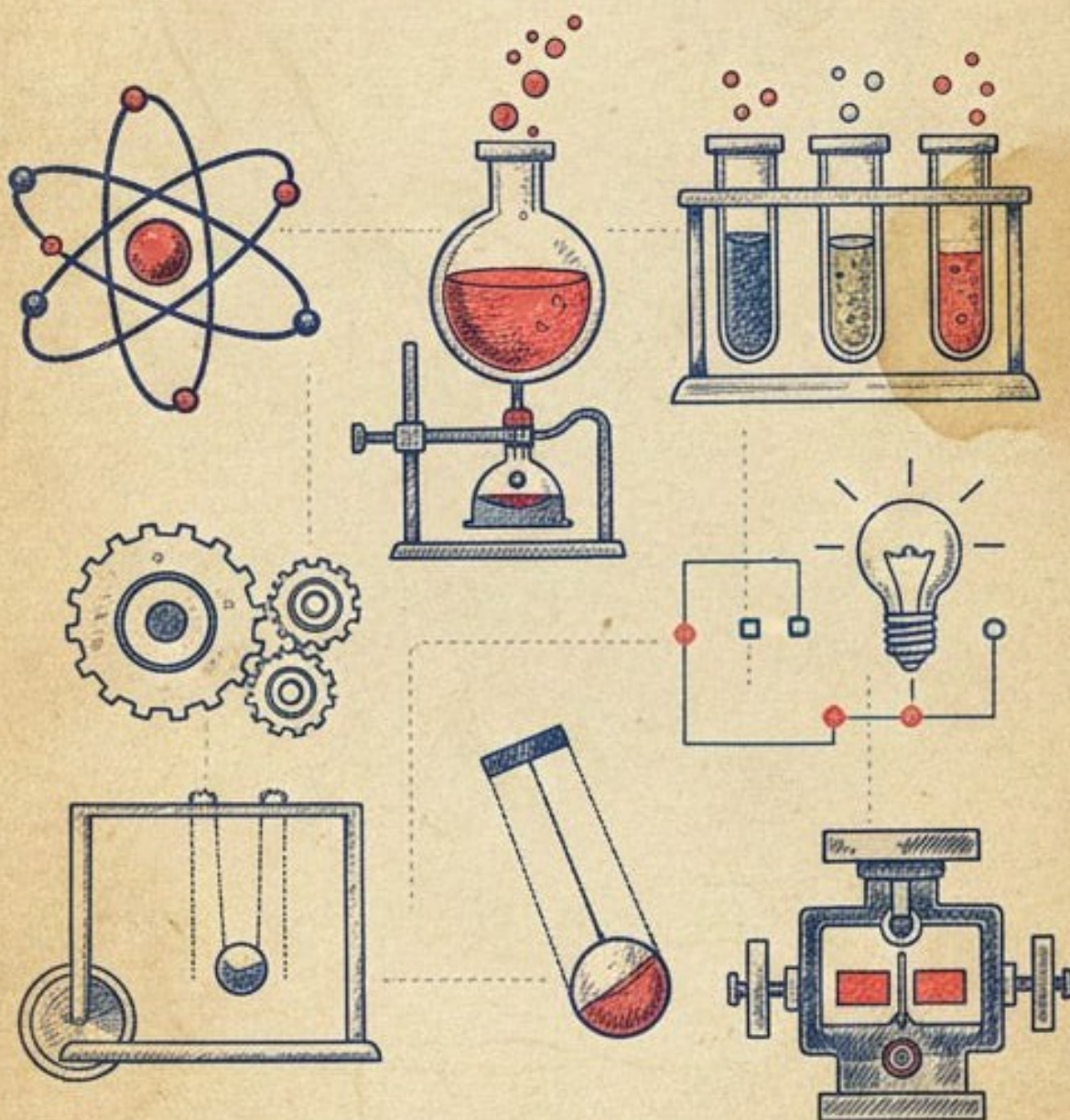


EXERCICES CORRIGÉS

PHYSIQUE & CHIMIE

6^{ème} ANNÉE SECONDAIRE



Solutions Complètes & Détaillées

-A-

PHYSIQUE

Exercice n° 1

A l'origine des temps, un mobile M passe par l'origine d'un repère fixe orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; son vecteur vitesse a pour expression: $\vec{v} = 2 \vec{i} + (8t - 12) \vec{j}$

1) Déterminer les expressions de son vecteur accélération et de son vecteur position.

2) Déterminer les équations horaires du mouvement. En déduire l'équation de la trajectoire du mobile; quelle est sa nature? Représenter cette trajectoire entre les instants de dates $t_1 = 0$ s et $t_2 = 3$ s.

3) A quels instants le vecteur vitesse aura-t-il:

a) même direction que le vecteur $\vec{i}$?

b) une direction faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec $\vec{i}$?

Corrigé

1) Soit $\vec{Ox}$ l'axe portant le vecteur $\vec{i}$ et $\vec{Oy}$ l'axe portant le vecteur $\vec{j}$. Dans ce repère, le vecteur vitesse s'écrit:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad \text{or} \quad \vec{v} = 2 \vec{i} + (8t - 12) \vec{j} \quad \text{d'où:}$$

$$v_x = 2 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_y = 8t - 12 \quad (\text{m.s}^{-1})$$

* Le vecteur accélération est la dérivée de $\vec{v}$ par rapport à t :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} \quad \text{avec:} \quad \gamma_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_y = \frac{dv_y}{dt} = 8 \text{ m.s}^{-2},$$

donc $\vec{\gamma}$ s'écrit: $\vec{\gamma} = 8 \vec{j}$

* Le vecteur position $\vec{OM}$ est la primitive de $\vec{v}$ par rapport à t :

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad \text{avec:}$$

$$x \text{ primitive de } v_x: \quad x = 2t + x_0$$

$$y \text{ primitive de } v_y: \quad y = 4t^2 - 12t + y_0$$

Puisqu'à $t = 0$ s, le mobile passe par l'origine des espaces, on a $x_0 = 0$ m et $y_0 = 0$ m d'où $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 12t$

Le vecteur position est: $\vec{OM} = 2t \vec{i} + (4t^2 - 12t) \vec{j}$

2) Les lois horaires (ou équations horaires) du mouvement sont les équations paramétriques $x = 2t$ et $y = 4t^2 - 12t$

* L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre x et y :

$$\begin{cases} x = 2t \implies t = \frac{x}{2} \\ y = 4 \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 12 \left(\frac{x}{2} \right) = x^2 - 6x \end{cases}$$

La trajectoire est une branche de parabole d'équation:

$$y = x^2 - 6x$$

Représentons cette trajectoire entre les instants de dates $t_1 = 0$ s et $t_2 = 3$ s. Pour cela, déterminons les coordonnées du mobile à ces deux dates et les coordonnées du sommet de la trajectoire parabolique.

A $t = 0\text{s}$, $x = 0\text{ m}$; $y = 0\text{ m}$

A $t = 3\text{s}$, $x = 6\text{ m}$, $y = 0\text{ m}$

L'abscisse du sommet sera obtenue en annulant la dérivée de y par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 6 = 0 \implies x_S = 3\text{m}$$

L'ordonnée correspondante est:

$$y_S = (3)^2 - 6 \times 3 = -9\text{m}$$

3) a) Si le vecteur vitesse a même direction que $\vec{i}$, il s'écrit:

$\vec{v} = a \vec{i} + 0 \vec{j}$, donc sa composante v_y est nulle:

$$v_y = 8t - 12 = 0 \implies t = 1,5\text{ s}$$

(C'est l'instant d'arrivée du mobile en S sommet de la parabole)

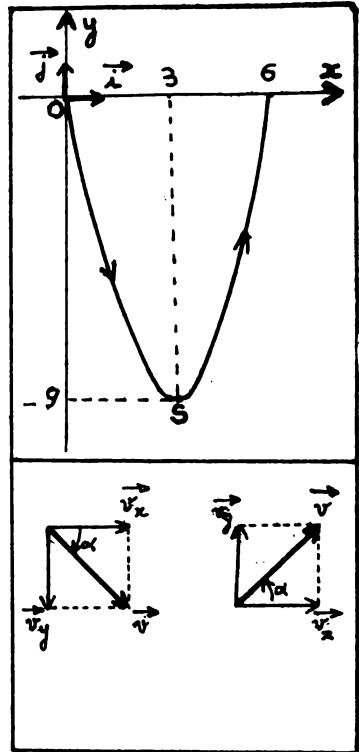
b) Si la direction de la vitesse $\vec{v}$ fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec $\vec{i}$, on peut avoir $(\vec{i}, \vec{v}) = 45^\circ$ ou $(\vec{i}, \vec{v}) = -45^\circ$ donc $\text{tg } \alpha = \pm 1$

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{8t - 12}{2}$$

* Si $\alpha = -45^\circ$, $\text{tg } \alpha = -1 \implies 8t - 12 = -2 \implies t = 1,25\text{ s}$

* Si $\alpha = +45^\circ$, $\text{tg } \alpha = +1 \implies 8t - 12 = 2 \implies t = 1,75\text{ s}$

Remarque: Ces deux instants correspondent au passage du mobile aux points A (2,5 m ; - 8,75 m) et B (3,5 m ; - 8,75 m).



Exercice n° 2

Dans le repère fixe ($0, \vec{i}, \vec{j}$), le mouvement d'un mobile M est tel que, pour $t \geq 0\text{s}$:

- à chaque instant, le vecteur accélération est $\vec{\gamma} = -8 \vec{j}$

- à l'instant de date $t = 0\text{ s}$, le vecteur vitesse est $\vec{v}_0 = 2 \vec{i}$ et le vecteur position est. $\vec{OM}_0 = 16 \vec{j}$ ($\vec{i}$ horizontal et $\vec{j}$ vertical).

1) Déterminer les expressions du vecteur vitesse et du vecteur position du mobile en fonction du temps.

2) a) Quelles sont les lois horaires du mouvement de M ?

b) En déduire l'équation de sa trajectoire. Représenter cette trajectoire .

c) Représenter les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{OM}_0$.

3) A quelles dates le vecteur espace du mobile aura-t-il même direction que le vecteur $\vec{i}$?

4) A quelles dates le vecteur vitesse du mobile M forme-t-il avec le vecteur $\vec{i}$ un angle de 45° ? Déterminer alors la position du mobile et le module de sa vitesse.

Corrigé

1) Le vecteur vitesse est la primitive du vecteur accélération

$$\vec{a} = -8 \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{v} = (-8t + k_1) \vec{i} + k_2 \vec{j}$$

k_1 et k_2 étant des constantes qui seront déterminées par les conditions initiales.

A $t = 0$ s, $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_0 = 2 \vec{i} \\ \vec{v}_0 = k_1 \vec{i} + k_2 \vec{j} \end{array} \right. \text{ d'où } k_1 = 0 \text{ et } k_2 = 2 \text{ m.s}^{-1}$

Le vecteur vitesse s'écrit donc: $\vec{v} = 2 \vec{i} - 8t \vec{j}$

* Le vecteur position est la primitive du vecteur vitesse.

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} = (2t + x_0) \vec{i} + (-4t^2 + y_0) \vec{j}$$

x_0 et y_0 sont déterminées par les conditions initiales

A $t=0$ s, $\left. \begin{array}{l} \vec{OM} = \vec{OM}_0 = 16 \vec{j} \\ \vec{OM}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 16 \end{array} \right.$

Le vecteur espace s'écrit donc

$$\vec{OM} = 2t \vec{i} + (16 - 4t^2) \vec{j}$$

2) a) Les lois horaires du mouvement sont les équations paramétriques: $x = 2t$ et $y = -4t^2 + 16$

b) L'équation de la trajectoire est la relation indépendante de la variable t entre x et y

$$x = 2t \implies t = \frac{x}{2}$$

$$y = -4t^2 + 16 \implies y = -4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 16 \implies y = -x^2 + 16$$

La trajectoire est une branche de parabole d'équation cartésienne $y = -x^2 + 16$

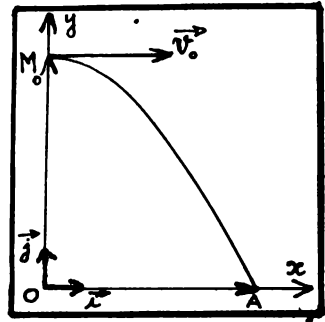
c) $\vec{v}_0 = 2 \vec{i}$, il est donc parallèle à l'axe $\vec{Ox}$.

$\vec{OM}_0 = 16 \vec{j}$, il est donc porté par l'axe Oy

3) Si le vecteur position du mobile a même direction que $\vec{i}$, il s'écrit alors $\vec{OM} = x \vec{i}$ donc $y = 0$

$$y = 16 - 4t^2 \implies t^2 = 4 \implies t = \pm 2 \text{ s}$$

La solution $t = -2$ s est à rejeter puisque le mouvement est défini pour $t \geq 0$ s. nous concluons qu'à $t = 2$ s, le vecteur position du mobile est de même direction que le vecteur $\vec{i}$: c'est le vecteur $\vec{OA}$



4) Si le vecteur vitesse $\vec{v}$ fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec $\vec{i}$, on peut avoir $(\vec{i}, \vec{v}) = 45^\circ$ ou $(\vec{i}, \vec{v}) = -45^\circ$ $\text{tga} = \pm 1$
(voir exercice n°1, troisième question) $\text{tga} = \frac{v_y}{v_x}$

$$\text{tga} = \pm 1 \text{ avec } v_x = 2 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } v_y = -8t \text{ (en m.s}^{-1}\text{)}$$

$$-\frac{8t}{2} = 1 \implies -8t = 2 \implies t = -0,25 \text{ s (à rejeter car } t < 0 \text{ s)}$$

$$-\frac{8t}{2} = -1 \implies -8t = -2 \implies t = +0,25 \text{ s}$$

Le vecteur vitesse fait un angle de 45° avec $\vec{i}$ à l'instant de date $t = 0,25 \text{ s}$.

La position du mobile à cette date:

$$x = 2t = 2 \times 0,25 = 0,5 \text{ m}$$

$$y = -4t^2 + 16 = -4 \times (0,25)^2 + 16 = 15,75 \text{ m}$$

A cet instant: $v_x = 2 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_y = -2 \text{ m.s}^{-1}$ alors:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 4} = 2,83 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice n° 3

Les lois horaires du mouvement d'un point matériel dans le repère d'espace $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont:

$$x = 2t ; \quad y = -5t^2 + 4t ; \quad z = 0$$

On prendra $t \geq 0 \text{ s}$. Les distances sont exprimées en mètre et les temps en seconde.

1) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile. La représenter.

2) Déterminer l'expression du vecteur vitesse du point matériel :

a) lorsqu'il rencontre le plan $y = 0$

b) lorsqu'il passe par le sommet de sa trajectoire.

3) Déterminer l'expression du vecteur accélération du mobile. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire au point défini par $(x = 0,8 \text{ m}; y = 0,8 \text{ m}; z = 0 \text{ m})$.

Corrigé

1) Puisque $\forall t$, on a $z = 0 \text{ m}$, la trajectoire sera contenue dans le plan $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'équation de la trajectoire est la relation entre x et y indépendante de t .

$$x = 2t \implies t = \frac{x}{2}$$

$$y = -5t^2 + 4t \implies y = -\frac{5}{4}x^2 + 2x$$

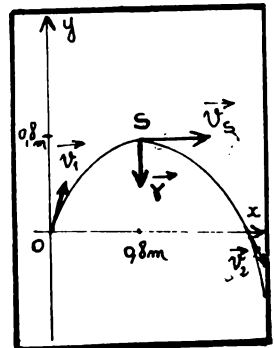
L'équation de la trajectoire est donc:

$$y = -1,25x^2 + 2x \quad (1)$$

La trajectoire est une branche de parabole. Les coordonnées de son sommet S sont telles que :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_S = -2,5x_S + 2 = 0 \implies x_S = \frac{2}{2,5} = 0,8 \text{ m}$$

$$y_S = -1,25 \times (0,8)^2 + 2 \times 0,8 = 0,8 \text{ m}$$



Le sommet de la parabole est le point S de coordonnées :

$$x_S = 0,8 \text{ m} ; \quad y_S = 0,8 \text{ m}$$

Pour représenter la trajectoire, on tient compte du point où débute le mouvement: à $t = 0 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$ et $y = 0 \text{ m}$.

2) Le vecteur vitesse s'écrit:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -10t + 4$$

a) Lorsque le point matériel rencontre le plan $y = 0$ m, on a d'après la relation (1):

$$-1,25 x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(2 - 1,25x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1,6 \text{ m} \end{cases}$$

Les instants correspondants sont, puisque $x = 2t$:

$$t_1 = \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ s}$$

Les vitesses correspondantes sont telles que:

$$\text{à } t_1 \left\{ \begin{array}{l} v_{1x} = 2 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{1y} = 4 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = 2 \vec{i} + 4 \vec{j}$$

$$\text{à } t_2 \left\{ \begin{array}{l} v_{2x} = 2 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{2y} = -4 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_2 = 2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

Remarquons que ces deux vecteurs vitesses ont même norme:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 16} = 4,47 \text{ m.s}^{-1} \quad (\text{voir figure})$$

b) Au sommet de la trajectoire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est parallèle à l'axe $(0, \vec{i})$, sa composante suivant $(0, \vec{j})$ est nulle:

$$v_y = 0 \Rightarrow -10t + 4 = 0 \Rightarrow t = 0,4 \text{ s}$$

A cette date $t_3 = 0,4$ s, le vecteur vitesse s'écrit:

$$\vec{v}_3 = 2 \vec{i}$$

3) Le vecteur accélération est $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j}$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \text{ m.s}^{-2} \\ \gamma_y = \frac{dv_y}{dt} = -10 \text{ m.s}^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\gamma} = -10 \vec{j}$$

Le vecteur accélération est dirigé suivant $(0, \vec{j})$: (voir figure)

Rayon de courbure: Le point de coordonnées $(0,8 \text{ m}, 0,8 \text{ m})$ correspond au sommet de la trajectoire. En ce point $\vec{v} = 2 \vec{i}$ et $\vec{\gamma} = -10 \vec{j}$, donc $\vec{\gamma}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$. (voir figure).

Puisque le vecteur accélération peut s'écrire $\vec{\gamma} = \gamma_t \vec{t} + \gamma_n \vec{n}$ alors $\gamma_t = 0 \text{ m.s}^{-2}$ et $\gamma_n = -10 \text{ m.s}^{-2}$; or $\|\vec{\gamma}_n\| = \frac{v^2}{\rho}$

d'où le rayon de courbure est $\rho = \frac{v^2}{\|\vec{\gamma}_n\|}$ avec $\|\vec{v}\| = 2 \text{ m.s}^{-1}$ et $\|\vec{\gamma}_n\| = 10 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow \rho = \frac{2 \times 2}{10} = 0,4 \text{ m}$

2- MOUVEMENTS RECTILIGNES

Exercice n° 1

Dans un plan muni d'un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, le mouvement d'un mobile M est défini par son vecteur position:

$$\vec{OM} = 4(t + 1)\vec{i} + 2(4t - 1)\vec{j}$$

1) Déterminer la position du mobile à l'instant $t = 0$ s (origine des dates).

2) Déterminer l'expression de son vecteur vitesse. Calculer sa valeur. En déduire la nature du mouvement de M.

3) Déterminer l'équation et la nature de sa trajectoire. La représenter.

Corrigé

1) Le vecteur espace a pour expression:

$$\vec{OM} = 4(t + 1)\vec{i} + 2(4t - 1)\vec{j}$$

A $t = 0$ s, le vecteur espace s'écrit: $\vec{OM}_0 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$
 or $\vec{OM}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, donc la position du mobile à l'origine des dates est donnée par: $x_0 = 4$ m ; $y_0 = -2$ m.

2) Le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur espace:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

La valeur de la vitesse est $\|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 64} = 8,94 \text{ m.s}^{-1}$

Le vecteur vitesse est constant, donc le mouvement du mobile est **rectiligne uniforme**.

3) Puisque le vecteur espace s'écrit: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, les lois horaires du mouvement s'écrivent:

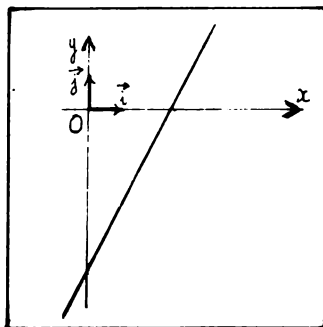
$$x = 4(t + 1) = 4t + 4 \quad (1)$$

$$y = 2(4t - 1) = 8t - 2 \quad (2)$$

De (1) on tire $4t = x - 4$, puis on remplace $4t$ par sa valeur dans (2):

$$y = 2(x - 4) - 2 = 2x - 10$$

La trajectoire est donc la droite d'équation $y = 2x - 10$



Exercice n° 2

1) Un mobile A décrit un axe $\vec{Ox}$ suivant un mouvement uniforme. A la date $t_1 = 1$ s, il passe par la position d'abscisse $x_1 = 2$ m; à la date $t_2 = 2$ s, il passe par la position d'abscisse $x_2 = 0$ m. Déterminer l'équation horaire du mouvement de A.

2) Sur le même axe, se déplace un second mobile B. Son mouvement a pour équation horaire $x = 2t$. Déterminer l'abscisse du point de rencontre des deux mobiles et la date correspondante.

Représenter sur un schéma les deux mobiles avec les vecteurs vitesses à un instant t avant la rencontre sur l'axe $\vec{Ox}$.

Corrigé

1) Le mouvement du mobile A est rectiligne uniforme; son équation horaire est une fonction du premier degré en t de la forme $x = a t + b$. Puisque x est en mètre, alors a et b sont aussi exprimés en mètre et le coefficient (a) possède la dimension d'une vitesse, il s'exprime en m.s^{-1} . L'équation horaire s'écrit: $x = v t + x_0$. Déterminons v et x_0 .

A t_1 l'équation s'écrit: $x_1 = v.t_1 + x_0$

A t_2 l'équation s'écrit: $x_2 = v.t_2 + x_0$

De ces deux équations, on peut déduire $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ puis porter la valeur de v dans l'une des deux équations pour calculer x_0 . On trouve $v = -2 \text{ m.s}^{-1}$ et $x_0 = 4 \text{ m}$.

L'équation horaire du mouvement de A est $x_A = -2t + 4$

2) L'équation horaire du mouvement de B est $x_B = 2t$

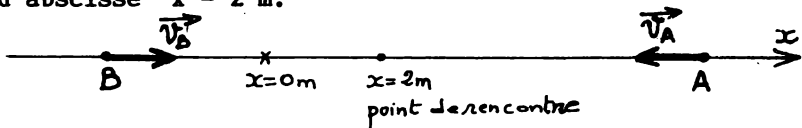
On remarque que $v_B = \frac{dx_B}{dt} = 2 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_A = \frac{dx_A}{dt} = -2 \text{ m.s}^{-1}$

Les deux mobiles se déplacent en sens contraires.

Au point de rencontre, les deux mobiles passent par le même point, donc leurs abscisses sont égales, d'où:

$$x_A = x_B \implies 2t = -2t + 4 \implies 4t = 4 \implies t = 1 \text{ s}$$

La rencontre des deux mobiles se fait à la date $t = 1 \text{ s}$ au point d'abscisse $x = 2 \text{ m}$.



Exercice n°3

On donne les vecteurs espaces correspondant aux mouvements de deux points matériels M_1 et M_2 dans le même repère plan fixe $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé:

$$\vec{OM}_1 = (t + 3) \vec{i} + (2t + 5) \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{OM}_2 = (5t^2 + 2t + 1) \vec{j}$$

Déterminer pour chacun des deux mobiles:

a) l'équation de la trajectoire,

b) la nature du mouvement sur cette trajectoire et s'il y a lieu, les différentes phases du mouvement.

Corrigé

1) Pour le mobile M_1 :

Le vecteur espace $\vec{OM}_1 = (t + 3) \vec{i} + (2t + 5) \vec{j}$ s'écrit:

$$\vec{OM}_1 = x \vec{i} + y \vec{j}$$

a) Les équations paramétriques sont donc:

$$x = t + 3 \quad \text{et} \quad y = 2t + 5$$

Éliminons t entre x et y , nous obtenons successivement:

$$t = x - 3 \quad \text{puis} \quad y = 2(x - 3) + 5 = 2x - 1$$

La trajectoire est la droite d'équation $y = 2x - 1$

b) Le vecteur vitesse est $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}_1}{dt}$

$$\vec{v} = 1 \vec{i} + 2 \vec{j}$$

Le vecteur accélération est $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

Le vecteur vitesse de M_1 est constant, son vecteur accélération est nul: le mouvement est rectiligne uniforme.

2) Pour le mobile M_2 :

Le vecteur espace $\vec{OM}_2 = (5t^2 + 2t + 1) \vec{j}$ s'écrit: $\vec{OM}_2 = x \vec{i} + y \vec{j}$

a) les équations paramétriques sont:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

Donc $\forall t, x = 0 \text{ m} \Rightarrow$ Le mobile M_2 se déplace sur l'axe Oy . La trajectoire est par conséquent la droite d'équation $x = 0$

b) L'équation horaire de ce mouvement rectiligne est: $y = 5t^2 + 2t + 1$. Elle est du second degré en t , le mouvement est donc rectiligne uniformément varié.

* Etudions les différentes phases de ce mouvement:

$$v = \frac{dy}{dt} = 10t + 2$$

Cette vitesse s'annule à la date t telle que $10t + 2 = 0$ d'où $t = -0,2 \text{ s}$. A cette date, le mobile "s'arrête", sa vitesse change de signe, donc son mouvement change de sens, M_2 rebrousse chemin.

La valeur de l'accélération de ce mobile M_2 est:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

Pour déterminer la nature du mouvement de M_2 , étudions le signe du produit γv en étudiant les signes de γ et de v dans l'intervalle $[-\infty, +\infty]$

Nous obtenons le tableau ci-contre :

Nature du mouvement :

* $\forall t \in [-\infty; -0,2 \text{ s}]$, $\gamma v < 0$, le mouvement est rectiligne uniformément retardé.

* $\forall t \in]-0,2 \text{ s}; +\infty]$, $\gamma v > 0$ le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

$t \text{ (s)}$	$-\infty$	$-0,2$	$+\infty$
γ	+		+
v	-	0	+
γv	-	0	+
nature du mouvement	retardé	Anné	accélére

Exercice n° 4

1) Un mobile M , en mouvement sur un axe $x'x$ se trouve à l'instant de date $t = 0 \text{ s}$ en un point O de cet axe, ce point sera pris comme origine des espaces. La vitesse initiale de M (à $t = 0 \text{ s}$) est $v_0 = 6 \text{ m.s}^{-1}$. Son accélération reste constante dans l'intervalle de temps $[0 \text{ s}; 10 \text{ s}]$, dirigée suivant le sens négatif du repère et de module 2 m.s^{-2} .

a) Quelle est l'équation horaire du mouvement ?

b) A quelle date le mobile change-t-il de sens? En déduire les différentes phases de son mouvement.

c) Quelle est la distance parcourue par le mobile entre les instants $t = 0$ s et $t = 10$ s ?

d) Quelle est la valeur de la vitesse du mobile :

- à la date $t = 4$ s ?

- au point d'abscisse $x = -7$ m ?

e) Tracer le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses dans l'intervalle $[0 \text{ s} ; 6 \text{ s}]$.

2) Un second mobile B décrit le même axe d'un mouvement uniforme avec une vitesse de valeur algébrique $v_B = +3 \text{ m.s}^{-1}$

A la date $t = 0$ s, B se trouve au point d'abscisse 2 m.

a) Etablir l'équation horaire du mouvement de B.

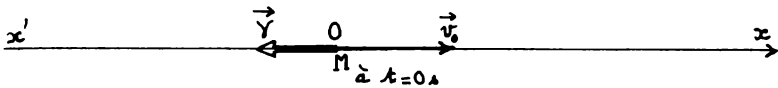
b) A quelles dates se font les rencontres des mobiles M et B ? Déterminer les abscisses des positions correspondantes.

Corrigé

1) Mouvement de M

Considérons le mobile M en mouvement rectiligne sur l'axe $\vec{x}$

A l'instant $t = 0$ s, $x_0 = 0$ m ; $v_0 = 6 \text{ m.s}^{-1}$; $\gamma = -2 \text{ m.s}^{-2}$.



a) Expression de la vitesse du mobile M:

Comme $\gamma = \frac{dv}{dt}$, v est donc une primitive de γ

$$\gamma = -2 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow v = -2t + v_0 \Rightarrow v = -2t + 6$$

Equation horaire du mouvement: $x = f(t)$

x est une primitive de v : $x = -t^2 + 6t + k$; à $t = 0$ s, on a $x = 0$ m et $x = k$ d'où $k = 0 \Rightarrow x = -t^2 + 6t$

b) Le mouvement du mobile change de sens quand sa vitesse change de signe. Cherchons la date à laquelle cette vitesse s'annule.

$$v = -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ s.}$$

Le mobile M rebrousse chemin à la date $t = 3$ s.

Pour déterminer les différentes phases du mouvement, étudions le signe du produit γv du mobile M dans l'intervalle de temps $[0 \text{ s} ; 10 \text{ s}]$.

On obtient le tableau ci-contre
* $0 \leq t < 3$ s, $\gamma v < 0$: le mouvement est rectiligne uniformément retardé.

* à $t = 3$ s, le mobile M marque un arrêt instantané.

* $3 \text{ s} < t \leq 10 \text{ s}$, $\gamma v > 0$: le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

$t(\text{s})$	0	3	10
γ	-	-	-
v	+	0	-
γv	-	0	+
nature du mouvement :	retardé		accéléré

c) Remarque: Pour traiter cette question, il ne faut pas

confondre abscisse du mobile et distance parcourue par le mobile. Comme dans l'intervalle $[0 \text{ s} ; 10 \text{ s}]$, le mouvement du mobile se compose de deux phases, il faut chercher la distance parcourue par le mobile pendant chaque phase puis chercher la distance totale.

■. Distance parcourue pendant la 1^{ère} phase $0 \leq t < 3 \text{ s}$
 $OA = x_A - x_0 = x_A = x \text{ (à } t = 3 \text{ s)}$

$$OA = -3^2 + (6 \times 3) = -9 + 18 = 9 \text{ m}$$

■. Distance parcourue pendant la 2^{ème} phase $3 \text{ s} < t \leq 10 \text{ s}$

$AC = |x_C - x_A|$; x_C est l'abscisse de M à la date $t = 10 \text{ s}$

$$x_C = -10^2 + (6 \times 10) = -40 \text{ m}$$

La distance parcourue est: $AC = |-40 - 9| = 49 \text{ m}$

La distance totale parcourue par M pendant les 10 secondes du mouvement est $d = OA + AC = 9 + 49 = 58 \text{ m}$ $d = 58 \text{ m}$

d) la valeur de la vitesse du mobile:

■ à la date $t = 4 \text{ s}$

$$v = -2t + 6 \Rightarrow v = -8 + 6 = -2 \text{ m.s}^{-1}$$

■ au point d'abscisse $x = -7 \text{ m}$

Comme le mouvement est rectiligne uniformément varié, on peut

écrire: $v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$ $v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\gamma(x - x_0)}$

$$A.N: v = \pm \sqrt{36 + 2 \times (-2) \times (-7)} = \pm \sqrt{64} = \pm 8 \text{ m.s}^{-1}$$

Comme le mobile passe par $x = -7 \text{ m}$ pendant la deuxième phase, alors sa vitesse est négative, d'où $v = -8 \text{ m.s}^{-1}$

(on peut calculer la date correspondante, on trouve $t = 7 \text{ s}$).

e) Le diagramme des espaces est la représentation graphique de la fonction $x = f(t)$.

Le diagramme des vitesses est la représentation graphique de la fonction $v = h(t)$

Diagramme des espaces

$$\begin{cases} x = -2t^2 + 6t & (\text{parabole}) \\ \begin{cases} t = 0 \text{ s} \\ x = 0 \text{ m} \end{cases} \begin{cases} t = 3 \text{ s} \\ x = 9 \text{ m} \end{cases} \begin{cases} t = 6 \text{ s} \\ x = 0 \text{ m} \end{cases} \end{cases}$$

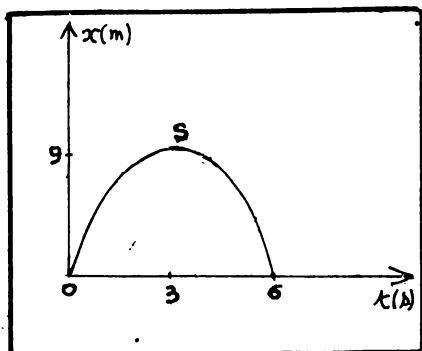
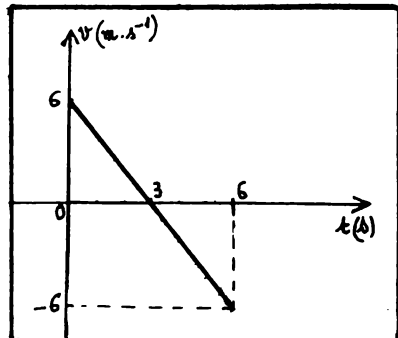


diagramme des vitesses

$$\begin{cases} v = -2t + 6 & (\text{droite}) \\ \begin{cases} t = 0 \text{ s} \\ v = 6 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \begin{cases} t = 3 \text{ s} \\ v = 0 \end{cases} \begin{cases} t = 6 \text{ s} \\ v = -6 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \end{cases}$$



2)a) Equation horaire du mouvement de B:

$v_B = 3 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow x = 3t + k$; or à $t = 0 \text{ s}$, $x = 2 \text{ m}$ donc $k = 2$
et la loi horaire sera $x = 3t + 2$

b) Les deux mobiles M et B se rencontrent quand $x_M = x_B$
 $- t^2 + 6t = 3t + 2 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 2) = 0$

L'équation obtenue est du second degré en t , elle admet deux solutions. Il y a donc deux rencontres qui se font aux dates:

* $t_1 = 1 \text{ s}$ au point d'abscisse $x_1 = 5 \text{ m}$

et

* $t_2 = 2 \text{ s}$ au point d'abscisse $x_2 = 8 \text{ m}$

Exercice n° 5

Un mobile parcourt un axe $\vec{Ox}$. On donne les abscisses de ses différentes positions en fonction du temps:

t (s)	3	4	5	6	7
x (m)	8	13	20	29	40

1) Montrer que le mouvement du mobile est uniformément varié. Calculer la valeur de son accélération.

2) Où se trouve le mobile aux dates $t = 2 \text{ s}$ et $t = 8 \text{ s}$?

3) A quelle date le mouvement du mobile change-t-il de sens ?

Corrigé

1) Nature du mouvement du mobile:

Remarquons que dans le tableau de mesures, les dates proposées définissent un intervalle de temps constant $\theta = 1 \text{ s}$.

Calculons la distance parcourue par le mobile pendant chaque intervalle de temps θ .

- entre $t_3 = 3 \text{ s}$ et $t_4 = 4 \text{ s}$ $d_1 = x_4 - x_3 = 13 - 8 = 5 \text{ m}$

- entre $t_4 = 4 \text{ s}$ et $t_5 = 5 \text{ s}$ $d_2 = x_5 - x_4 = 20 - 13 = 7 \text{ m}$

- entre $t_5 = 5 \text{ s}$ et $t_6 = 6 \text{ s}$ $d_3 = x_6 - x_5 = 29 - 20 = 9 \text{ m}$

- entre $t_6 = 6 \text{ s}$ et $t_7 = 7 \text{ s}$ $d_4 = x_7 - x_6 = 40 - 29 = 11 \text{ m}$

Les distances d_1 , d_2 , d_3 et d_4 parcourues par le mobile pendant des intervalles de temps successifs égaux à $\theta = 1 \text{ s}$ forment une progression arithmétique: le mouvement est donc rectiligne uniformément varié. La raison de cette progression est :

$$r = 11 - 9 = 9 - 7 = 7 - 5 = 2 \text{ m}$$

or $r = \gamma \theta^2$ donc l'accélération est $\gamma = \frac{r}{\theta^2} = \frac{2}{1^2} = 2 \Rightarrow \gamma = 2 \text{ m.s}^{-2}$

2) Entre $t_7 = 7 \text{ s}$ et $t_8 = 8 \text{ s}$, la distance parcourue est:

$$d_5 = 11 + 2 = 13 \text{ m} \quad \text{or} \quad d_5 = x_8 - x_7 \quad \text{donc} \quad x_8 = x_7 + d_5 = 53 \text{ m.}$$

L'abscisse du mobile à $t_8 = 8 \text{ s}$ est $x_8 = 53 \text{ m}$.

Entre $t_2 = 2 \text{ s}$ et $t_3 = 3 \text{ s}$, la distance parcourue est:

$$d_0 = 5 - 2 = 3 \text{ m} \quad \text{or} \quad d_0 = x_3 - x_2 \quad \text{donc} \quad x_2 = x_3 - d_0 = 5 \text{ m.}$$

L'abscisse du mobile à $t_2 = 2 \text{ s}$ est $x_2 = 5 \text{ m}$.

REMARQUE : On peut résoudre cette question en utilisant l'équation horaire du mouvement.

Le mouvement est rectiligne uniformément varié, son équation horaire s'écrit :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

avec v_0 = valeur de la vitesse à la date $t = 0 \text{ s}$

et x_0 = abscisse du mobile à la date $t = 0 \text{ s}$.

Comme $\gamma = 2 \text{ m.s}^{-2}$, alors $x = t^2 + v_0 t + x_0$. Déterminons les valeurs de v_0 et x_0 en utilisant deux couples (t, x) donnés.

$$\begin{aligned} \text{à } t_3 = 3 \text{ s, } x_3 = 8 \text{ m} &\Rightarrow 9 + 3v_0 + x_0 = 8 \Rightarrow \begin{cases} 3v_0 + x_0 = -1 \end{cases} \\ \text{à } t_4 = 4 \text{ s, } x_4 = 13 \text{ m} &\Rightarrow 16 + 4v_0 + x_0 = 13 \Rightarrow \begin{cases} 4v_0 + x_0 = -3 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = -2 \text{ m.s}^{-1} \\ x_0 = 5 \text{ m} \end{cases}$$

L'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$x = t^2 - 2t + 5$$

La position du mobile à $t_2 = 2 \text{ s}$ se définit par l'abscisse :

$$x_2 = 2^2 - (2 \times 2) + 5 = 5 \text{ m}$$

La position du mobile à $t_8 = 8 \text{ s}$ se définit par l'abscisse :

$$x_8 = 8^2 - (2 \times 8) + 5 = 53 \text{ m}$$

3) Le mouvement du mobile change de sens à la date où la vitesse du mobile change de signe en s'annulant.

Déterminons l'expression de la vitesse en fonction du temps.

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = 2 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow v = 2t + k$$

$$\text{à } t_0 = 0 \text{ s} \quad \left. \begin{array}{l} v_0 = k \\ \text{et} \\ v_0 = -2 \text{ m.s}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow v = 2t - 2$$

$$v = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s.}$$

Le mobile s'arrête instantanément et rebrousse chemin à la date $t = 1 \text{ s}$, à la position définie par l'abscisse $x = 4 \text{ m}$.

3- MOUVEMENTS CIRCULAIRES

Exercice n° 1

Une bille, supposée ponctuelle, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $R = 1,5 \text{ m}$ décrit un cercle de centre O avec une vitesse de module constant $\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1}$.

1) Déterminer les caractéristiques de son vecteur vitesse à une date t quelconque.

2) Déterminer les caractéristiques de son vecteur accélération au même instant.

3) Calculer la valeur de sa vitesse angulaire.

4) Donner les lois horaires $s(t)$ et $\alpha(t)$ du mouvement de la bille en prenant $s = 0$ à l'instant $t = 0 \text{ s}$.

5) Calculer la période de ce mouvement.

Corrigé

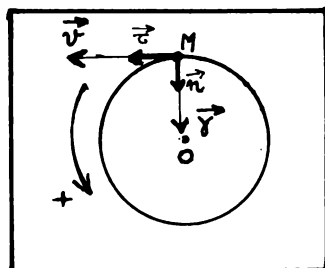
1) Vecteur vitesse:

La bille, ponctuelle, décrit le cercle dans le sens positif. A la date t la bille est en M . Son vecteur vitesse $\vec{v}$ a les caractéristiques suivantes

* direction : la tangente en M au cercle,

* sens: celui du mouvement,

* valeur: $\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1} = \text{constante}$.



Dans le repère $(\vec{\tau}, \vec{n})$ en M , le vecteur vitesse est $\vec{v} = \sqrt{2} \vec{\tau}$

2) Vecteur accélération:

Par définition, le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse.

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ or $\vec{v} = v \vec{\tau}$; v est constante mais $\vec{\tau}$ varie au cours du temps (en direction), donc $\vec{\gamma}$ n'est pas nul. Dans le repère

$(M, \vec{\tau}, \vec{n})$ le vecteur accélération s'écrit: $\vec{\gamma} = \gamma_t \cdot \vec{\tau} + \gamma_n \cdot \vec{n}$

avec $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0$ et $\gamma_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{1,5} = 1,3 \text{ m.s}^{-2}$ D'où $\vec{\gamma} = 1,3 \vec{n}$

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est centripète et de valeur constante égale à $1,3 \text{ m.s}^{-2}$.

3) Vitesse angulaire:

La relation entre l'abscisse curviligne s et l'abscisse angulaire α du point M est $s = R \alpha$. En dérivant par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\alpha}{dt} \text{ or } \frac{ds}{dt} = v \text{ et } \frac{d\alpha}{dt} = \alpha' = \omega \text{ d'où } v = R \omega.$$

La vitesse angulaire du mobile est $\omega = \frac{v}{R}$

$$\text{A.N: } \omega = \frac{\sqrt{2}}{1,5} = 0,95 \text{ rad.s}^{-1}$$

4) Lois horaires

Comme $v = \frac{ds}{dt}$ alors s est une primitive de $v \Rightarrow s = vt + s_0$

$v = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow s = \sqrt{2} t + s_0$ or à $t = 0 \text{ s}$, $s_0 = 0$ donc $s = \sqrt{2} t$

Comme $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ alors α est une primitive de $\omega \Rightarrow \alpha = \omega t + \alpha_0$
 $\omega = 0,95 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \alpha = 0,95 t + \alpha_0$, or à $t = 0 \text{ s}$, $\alpha_0 = \frac{s_0}{R} = 0$

Nous en déduisons : $\alpha = 0,95 t$

5) La période du mouvement:

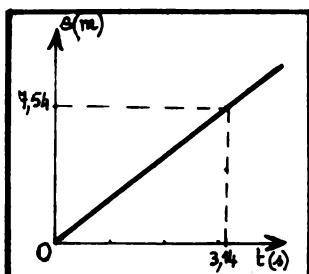
Le mouvement circulaire uniforme est périodique: le mobile passe en chaque point de la trajectoire à des dates régulièrement espacées dans le temps; la période est la durée T d'un

tour: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

A.N: $T = \frac{2 \times 3,14}{0,95} = 6,6 \text{ s}$

Exercice n° 2

Un mobile ponctuel décrit un cercle de rayon $R = 1,2 \text{ m}$. Soit A un point fixe de la trajectoire. L'abscisse curviligne du mobile est $\widehat{AM} = s$. On représente le diagramme de la variation de s en fonction du temps t .



1) Quelle est la nature du mouvement du mobile M ?

2) Calculer la valeur de la vitesse du mobile M.

3) Où se trouve le mobile M aux dates 0 s ; $3,14 \text{ s}$; $4,71 \text{ s}$? Représenter ces positions.

4) Représenter les vecteurs vitesses du mobile aux dates précédentes.

5) Déterminer l'accélération du mobile et représenter les vecteurs accélérations aux trois dates précédentes.

Corrigé

1) Le graphe de $s = f(t)$ est une droite passant par l'origine des axes, donc s est une fonction linéaire de t . Le mouvement est circulaire uniforme.

2) La loi horaire du mouvement s'écrit: $s = v t \Rightarrow v = \frac{s}{t}$.

D'après le diagramme, à la date $t = 3,14 \text{ s}$, l'abscisse curviligne du mobile est $s = 7,54 \text{ m}$, donc:

$$v = \frac{7,54 \text{ m}}{3,14 \text{ s}} \approx 2,4 \text{ m.s}^{-1}$$

3) ■ A la date $t_0 = 0 \text{ s}$, on a $s_0 = 0 \text{ m}$: le mobile est en A (origine des abscisses curvilignes).

■ A la date $t_1 = 3,14 \text{ s}$, l'abscisse curviligne est $s_1 = 7,54 \text{ m}$ et $\alpha_1 = \frac{s_1}{R} = 6,28 \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$: le mobile est de nouveau en A.

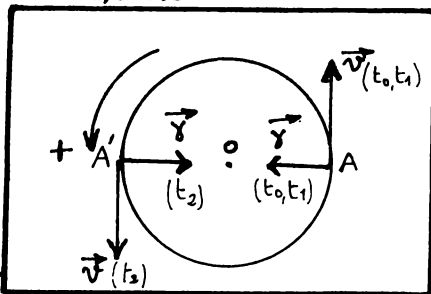
■ A la date $t_2 = 4,71 \text{ s}$, l'abscisse curviligne est $s_2 = vt_2 = 11,3 \text{ m}$ et $\alpha_2 = \frac{s_2}{R} = 9,42 \text{ rad} = 3\pi \text{ rad}$: le mobile occupe à la date t_2 la position A' diamétralement opposée à A.

4) Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement et sa valeur est $\|\vec{v}\| = 2,4 \text{ m.s}^{-1}$

5) Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uni-

forme est centripète, sa valeur constante est égale à $\frac{v^2}{R}$

A.N: $\gamma = \frac{(2,4)^2}{1,2} = 4,8 \text{ m.s}^{-2}$



× Exercice n° 3

Un mobile ponctuel M se déplace avec une vitesse angulaire constante sur un cercle de centre O et de rayon R. La période et l'accélération du mouvement valent respectivement 0,8 s et $24,6 \text{ m.s}^{-2}$. Déterminer le rayon R de la trajectoire et la norme de la vitesse $\vec{v}$ du mobile.

Corrigé

La période d'un mouvement circulaire est égale à la durée d'un tour: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec $\omega = \frac{v}{R} \implies T = \frac{2\pi R}{v} \cdot (1)$

L'accélération de ce mouvement est centripète, sa valeur est constante et égale à $\gamma = \frac{v^2}{R} \cdot (2)$

De la relation (2) on déduit $v^2 = R \cdot \gamma$

Elevons (1) au carré: $T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2}$. Remplaçons v^2 par sa

valeur et tirons R: $R = \frac{T^2 \gamma}{4\pi^2}$

A.N: $R = \frac{(0,8)^2 \times 24,6}{4 \times (3,14)^2} = 0,4 \text{ m}$

La valeur de la vitesse du mobile est:

$v = \frac{2\pi R}{T}$; A.N: $v = \frac{2 \times 3,14 \times 0,4}{0,8} = 3,14 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice n° 4

Un satellite artificiel tourne dans un plan équatorial autour de l'axe des pôles de la Terre, dans le même sens et avec la même vitesse angulaire que la Terre. Ce satellite évolue à l'altitude $z = 36000 \text{ km}$ et il paraît alors immobile pour un observateur fixe par rapport à la Terre. Déterminer la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du satellite sachant que le rayon de la Terre est $R = 6400 \text{ km}$.

Corrigé

Le satellite artificiel paraît immobile pour un observateur fixe par rapport à la Terre car ce satellite effectue un tour en 24 heures dans un plan équatorial autour de l'axe des Pôles

et il tourne dans le même sens que la Terre. C'est un satellite géostationnaire.

Le rayon de la trajectoire est $R' = R + z$

La période du satellite est $T = \frac{2 \pi R'}{v} = \frac{2 \pi (R + z)}{v}$

la vitesse du satellite est donc: $v = \frac{2 \pi (R + z)}{T}$

$$\text{A.N: } T = 24 \times 3600 = 86400 \text{ s}$$

$$R + z = 6400 + 36000 = 42400 \text{ km} = 4,24 \times 10^7 \text{ m}$$

$$v = \frac{2 \pi \times 4,24 \times 10^7}{8,64 \times 10^4} = 3,08 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice n° 5

Un moteur se met en rotation uniformément variée. Partant du repos, il atteint la vitesse angulaire de 3000 tours par minute après avoir effectué 100 tours.

1) Calculer l'accélération angulaire du mouvement.

2) Calculer la durée de ce mouvement par deux méthodes différentes.

Corrigé

1) Pour un solide en rotation uniformément variée, la relation indépendante du temps reliant l'élongation angulaire α , la vitesse angulaire α' et l'accélération angulaire α'' s'écrit:

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 = 2 \alpha'' (\alpha - \alpha_0)$$

avec α_0' = la vitesse angulaire à la date $t = 0$ s

α_0 = l'élongation angulaire à la date $t = 0$ s

Dans les conditions de l'exercice, à $t = 0$ s, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_0' = 0$

d'où l'accélération angulaire est $\alpha'' = \frac{\alpha'^2}{2\alpha}$

$$\text{A.N: } \alpha' = 3000 \text{ tours.mn}^{-1} = \frac{3000 \times 2 \pi}{60} = 100 \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\alpha = 100 \text{ tours} = 100 \times 2 \pi \text{ rad} = 200 \pi \text{ rad}$$

$$\alpha'' = \frac{\pi^2 \times 10^4}{2 \times 2 \pi \times 10^2} = 25 \pi = 78,5 \text{ rad.s}^{-2}$$

2) La durée du mouvement:

**** Première méthode:**

On utilise l'expression de la vitesse angulaire:

$$\alpha' = \alpha'' t \Rightarrow t = \frac{\alpha'}{\alpha''}$$

$$\text{A.N: } t = \frac{100 \pi}{25 \pi} = 4 \text{ s}$$

**** Deuxième méthode:**

On utilise l'expression de l'élongation angulaire $\alpha = \frac{1}{2} \alpha'' t^2$

$$\text{d'où } t = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha''}}$$

$$\text{A.N: } t = \sqrt{\frac{2 \times 200 \pi}{25 \pi}} = 4 \text{ s}$$

Exercice n° 6

Une particule se déplace sur un cercle suivant la loi horaire

$$\alpha = 4t^2 + 3t \text{ où } \alpha \text{ est en rad et } t \text{ est en s.}$$

1) Calculer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire de la particule à la date $t = 4 \text{ s}$.

2) Si le rayon de ce cercle est $R = 1,6 \text{ m}$, calculer la valeur de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{\gamma}$ à cette même date.

Corrigé

L'équation horaire du mouvement de la particule est du second degré en t , le mouvement est donc circulaire uniformément varié.

1) la vitesse angulaire est la dérivée de l'élongation angulaire par rapport au temps:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = 8t + 3$$

L'accélération angulaire est la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps:

$$\alpha'' = \frac{d\alpha'}{dt} = 8 \quad \text{donc } \alpha'' = 8 \text{ rad.s}^{-2}, \forall t.$$

$$\text{A } t = 4 \text{ s, } \alpha' = (8 \times 4) + 3 = 35 \text{ rad.s}^{-1}$$

2) Pour un mouvement circulaire, la valeur algébrique v de la vitesse linéaire est liée à la vitesse angulaire α' par la relation $v = R \cdot \alpha'$, R étant le rayon du cercle, d'où:

$$v = R \cdot (8t + 3)$$

$$\text{A la date } t = 4 \text{ s, } \alpha' = 35 \text{ rad.s}^{-1} \implies v = 56 \text{ m.s}^{-1}$$

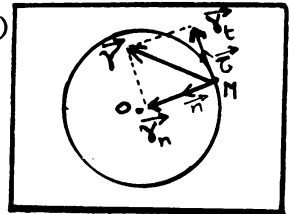
L'accélération s'écrit dans la base de Frenet ($\vec{\tau}$, $\vec{n}$) liée

la particule $\vec{\gamma} = \gamma_t \vec{\tau} + \gamma_n \vec{n}$ (γ_t étant la composante tangentielle et γ_n étant la composante normale)

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = R \cdot \alpha'' \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \alpha'^2$$

$$\text{A.N: } \gamma_t = 12,8 \text{ m.s}^{-2} \quad \gamma_n = 1960 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2} = 1960,4 \text{ m.s}^{-2}$$



RAPPELS DE DYNAMIQUE

A/ DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Un point matériel de masse m (solide de petites dimensions, proton, ion, électron ...) animé d'une vitesse $\vec{v}$ possède une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$.

La relation fondamentale de la dynamique (R.F.D) s'écrit:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{\gamma}$$

$\Sigma \vec{F}$; somme des forces agissant sur le point matériel.

$\vec{\gamma}$: accélération du mouvement de ce point matériel.

Parmi les forces que l'élève aura à considérer, citons:

- * le poids $\vec{P} = m \vec{g}$ ($\vec{g}$ = champ de pesanteur),
- * la force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$ que subit une particule chargée dans un champ électrique $\vec{E}$,
- * les forces de liaison, tel que la tension d'un fil, la force élastique d'un ressort, la réaction d'un plan....

B/ DYNAMIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

I/ DEFINITIONS:

Un système matériel est un ensemble de points matériels. Le centre d'inertie I d'un système matériel est un point qui se distingue par la simplicité de son mouvement par rapport aux autres points du système. Ce centre d'inertie se confond avec le centre de masse ou centre de gravité G . Le centre de masse G est défini par:

$$\Sigma (m_i \cdot \vec{GA}_i) = \vec{0}$$

$$\text{ou } \forall O, (\Sigma m_i) \cdot \vec{OG} = \Sigma (m_i \cdot \vec{OA}_i)$$

A_i = point matériel de masse m_i

$\Sigma m_i = M$ = masse du système.

La quantité de mouvement d'un système matériel est :

$$\vec{p} = \Sigma (m_i \cdot \vec{v}_i) = M \cdot \vec{v}_G$$

II/ R.F.D DE TRANSLATION :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M \cdot \vec{v}_G)}{dt} = M \vec{\gamma}_G$$

Un système matériel "isolé", pour lequel la somme des forces extérieures est nulle, conserve sa quantité de mouvement.

III/ R.F.D DE ROTATION :

Un solide mobile autour d'un axe possède un moment cinétique $\sigma = \Sigma (m_i \cdot r_i^2) \cdot \alpha' = J \cdot \alpha'$ (J étant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation et α' étant la vitesse angulaire de ce solide).

La relation fondamentale de la dynamique de rotation s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{dt} = J \alpha'' = \Sigma M_{\vec{F}_{\text{extérieures}}}$$

Un système en rotation, soumis à des forces extérieures de moment résultant nul, conserve un moment cinétique constant.

IV/ METHODE GENERALE:

Soit un dispositif formé de plusieurs parties indéformables en translation ou en rotation autour d'un axe fixe.

* On décompose le dispositif en systèmes indéformables.

* On applique à chaque système la R.F.D de translation ou de rotation.

* On projette les relations vectorielles dans des repères convenables.

* On exploite:

- les propriétés des fils et des ressorts (égalité des valeurs des tensions aux extrémités d'une portion rectiligne de fil, aux extrémités d'un ressort),

- la relation entre un déplacement rectiligne et une rotation, de type:

$$x = s = R\alpha \quad ; \quad v = R \cdot \alpha' \quad ; \quad \gamma = \gamma_t = R \cdot \alpha''$$

Il faut bien se rappeler des expressions des moments d'inertie des solides homogènes de formes particulières simples par rapport à des axes particuliers et il faut aussi connaître le théorème d'Huyghens pour les solides mobiles autour d'un axe qui ne passe pas par leur centre d'inertie.

4- R.F.D: SOLIDES PONCTUELS

Exercice n° 1

Dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ fixe, se déplace un solide supposé ponctuel de masse $m = 10^{-1}$ kg. A chaque instant, son vecteur position est: $\vec{OM} = (4t^2 - t^3) \cdot \vec{i} + (t^3 - 2) \cdot \vec{j}$

1) Déterminer l'expression de la quantité de mouvement de ce solide ponctuel. Calculer sa valeur à la date $t = 1$ s.

2) a) Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ agissant sur le solide ponctuel.

b) Déterminer l'intensité de cette force à la date $t = 1$ s.

Corrigé

1) Considérons le solide supposé ponctuel M dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'expression du vecteur position de M dans ce repère est $\vec{OM} = (4t^2 - t^3) \cdot \vec{i} + (t^3 - 2) \cdot \vec{j}$. Le vecteur vitesse de M est $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x = 4t^2 - t^3 \\ y = t^3 - 2 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = 8t - 3t^2 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = (8t - 3t^2)\vec{i} + 3t^2\vec{j}$$

Le vecteur quantité de mouvement est par définition $\vec{p} = m \vec{v}$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}$$

$$\vec{p} \begin{pmatrix} m \cdot v_x \\ m \cdot v_y \end{pmatrix} \iff \vec{p} \begin{pmatrix} p_x = m \cdot (8t - 3t^2) \\ p_y = 3 \cdot m \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

A l'instant $t = 1$ s et puisque $m = 10^{-1}$ kg, les composantes de $\vec{p}$ sont: $p_x = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $p_y = 0,3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Le vecteur $\vec{p}$ s'écrit: $\vec{p} = 0,5 \vec{i} + 0,3 \vec{j}$

La valeur de la quantité de mouvement est $\|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

$$\text{A.N: } \|\vec{p}\| = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,583 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) a) La relation fondamentale de la dynamique appliquée au solide ponctuel s'écrit:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{F} \begin{pmatrix} F_x = \frac{dp_x}{dt} = m(8 - 6t) \\ F_y = \frac{dp_y}{dt} = 6mt \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot (8 - 6t) \vec{i} + 6mt \vec{j}$$

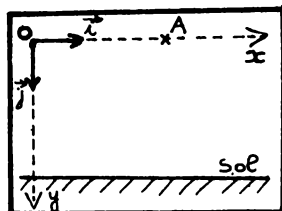
Avec $m = 0,1$ kg, on obtient: $\vec{F} = (0,8 - 0,6t) \vec{i} + 0,6t \vec{j}$
(la valeur de $\vec{F}$ étant en newton et le temps en seconde).

b) A $t = 1 \text{ s}$, l'expression de la force $\vec{F}$ est:
 $\vec{F} = 0,2 \vec{i} + 0,6 \vec{j}$

$$\vec{F} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{F}\| = \sqrt{0,2^2 + 0,6^2} = 0,632 \text{ N}$$

Exercice n° 2

On étudie la chute de deux billes B_1 et B_2 dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Les billes sont supposées ponctuelles. La bille B_1 est lancée horizontalement à la date $t = 0 \text{ s}$ à partir du point O avec une vitesse $\vec{v}_{01} = 2 \vec{i}$. A la même date, la bille B_2 est lâchée sans vitesse initiale



d'un point A tel que $\vec{OA} = 1,8 \vec{i}$. L'origine des temps $t = 0 \text{ s}$ est l'instant où les deux billes quittent l'axe $(0, \vec{i})$.

On prendra $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$

1) Quelle est l'expression du vecteur accélération de B_1 et de B_2 dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$?

2) Etablir les équations cartésiennes des trajectoires respectives de B_1 et de B_2 .

3) Calculer l'ordonnée y de chacune des deux billes à la date $t = 0,4 \text{ s}$.

4) Calculer la durée de chute de chaque bille pour atteindre le sol horizontal situé à $1,8 \text{ m}$ de l'axe $(0, \vec{i})$.

5) Quelle valeur minimale devrait-on donner à la vitesse $\vec{v}_{01}$ pour que les deux billes se rencontrent ? Que se passe-t-il si cette vitesse initiale a une valeur différente de la valeur minimale trouvée ?

Corrigé

1) Au cours du mouvement, chaque bille est soumise seulement à l'action de son poids. La R.F.D s'écrit pour un point matériel:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

$$\text{* Pour } B_1 : \vec{F}_1 = m_1 \vec{\gamma}_1 = m_1 \vec{g} \Rightarrow \vec{\gamma}_1 = \vec{g} = 10 \vec{j}$$

$$\text{* Pour } B_2 : \vec{F}_2 = m_2 \vec{\gamma}_2 = m_2 \vec{g} \Rightarrow \vec{\gamma}_2 = \vec{g} = 10 \vec{j}$$

Les deux billes ont la même accélération $\vec{\gamma} = \|\vec{g}\| \vec{j} = 10 \vec{j}$

2) Déterminons les équations des trajectoires de B_1 et B_2 .

* Trajectoire de B_1 : $\vec{\gamma}_1 = 10 \vec{j}$. Le vecteur vitesse est une primitive de $\vec{\gamma}_1$:

$$\vec{v}_1 = 10t \vec{j} + \vec{v}_{01} \quad \text{or} \quad \vec{v}_{01} = 2 \vec{i} \quad \text{donc} \quad \vec{v}_1 = 2 \vec{i} + 10t \vec{j}$$

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \text{ m.s}^{-1} \\ 10t \text{ (m.s}^{-1}) \end{pmatrix}$$

Le vecteur position $\vec{OB}_1$ est une primitive de $\vec{v}_1$

$$\vec{OB}_1 \begin{pmatrix} x = 2t + x_0 \\ y = 5t^2 + y_0 \end{pmatrix} \text{ or } x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0, \text{ donc } \vec{OB}_1 \begin{pmatrix} x = 2t \\ y = 5t^2 \end{pmatrix}$$

L'équation de la trajectoire est une relation entre x et y indépendante de t :

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y = 5t^2 = 5 \frac{x^2}{4} \quad \underline{y = 1,25 x^2} \quad \text{C'est l'équation d'une branche de parabole.}$$

* Trajectoire de B_2 :

$\vec{v}_2 = 10 \vec{j}$. Le même raisonnement que pour B_1 donne:

$$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{OB}_2 \begin{pmatrix} 1,8 \\ 5t^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{OB}_2 = 1,8 \vec{i} + 5t^2 \vec{j}$$

Les coordonnées de B_2 sont: $x = 1,8 \text{ m}$ et $y = 5t^2$

$\forall t$, $x = 1,8 \text{ m}$, la trajectoire de B_2 est la droite d'équation $x = 1,8 \text{ m}$.

3) B_1 et B_2 ont à chaque instant la même ordonnée $y = 5t^2$

A la date $t = 0,4 \text{ s}$, cette ordonnée est $y = 0,8 \text{ m}$.

4) La durée de chute correspond à la date d'arrivée de B_1 et B_2 au sol. Pour déterminer cette date, il faut donner à y la valeur $1,8 \text{ m}$.

$$5t^2 = 1,8 \Rightarrow t = \pm 0,6 \text{ s}$$

Comme $t > 0 \text{ s}$, alors $t = 0,6 \text{ s}$. La durée de chute est $T = 0,6 \text{ s}$

5) Les deux billes arrivent au sol à la date $t = 0,6 \text{ s}$. Si elles se rencontrent, la rencontre ne peut avoir lieu qu'à une date $t \leq 0,6 \text{ s}$. A cette date, $x_{B_1} = x_{B_2}$. Pour que ceci soit possible, il faut que les deux trajectoires puissent se couper, alors $x_1 > x_2$ avec $x_1 = \|\vec{v}_{01}\|t$ et $x_2 = 1,8 \text{ m}$.

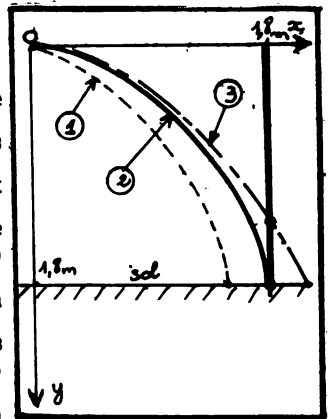
D'où, à $t = 0,6 \text{ s}$, on doit avoir:

$$0,6 \|\vec{v}_{01}\| > 1,8 \text{ m} \Rightarrow \|\vec{v}_{01}\| > 3 \text{ m.s}^{-1}$$

* si $\|\vec{v}_{01}\| < 3 \text{ m.s}^{-1}$: jusqu'à leur arrivée au sol, l'abscisse x_1 de B_1 reste toujours inférieure à l'abscisse x_2 de B_2 . Les deux trajectoires ne se coupent pas: B_1 et B_2 ne se rencontrent pas. (1)

* si $\|\vec{v}_{01}\| = 3 \text{ m.s}^{-1}$: la rencontre aura lieu au sol, à l'instant de date $t = 0,6 \text{ s}$ au point $(1,8 \text{ m}; 1,8 \text{ m})$ (2)

* si $\|\vec{v}_{01}\| > 3 \text{ m.s}^{-1}$: l'abscisse x_1 de la bille B_1 peut être égale à x_2 à une date $t < 0,6 \text{ s}$. Les deux trajectoires se coupent: B_1 et B_2 se rencontrent avant le sol. (3)



Exercice n° 3

Un chariot (S), assimilable à un point matériel de masse $m = 5 \text{ kg}$, est placé sur un rail horizontal de longueur $AB = L$ situé sur un axe $(O, \vec{i})$. En A, la vitesse du chariot est nulle. Pour déplacer le chariot de A à B, on lui applique une force horizontale constante $\vec{F}$. Les frottements sont supposés négligeables. On prendra pour origine des temps ($t = 0 \text{ s}$) la date de départ de (S) au point A.

1) Déterminer la nature du mouvement de (S) sur le rail AB.

2) Au cours du mouvement, le chariot acquiert une vitesse de valeur $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$ au bout de 2 s de parcours; déterminer l'expression de la force $\vec{F}$.

3) Le chariot atteint B avec une vitesse $v_B = 6 \text{ m.s}^{-1}$, en déduire:

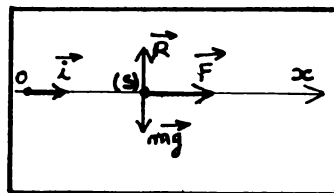
- la durée du parcours AB,
- la longueur L de ce parcours.

Corrigé

1) Soit le système (S) formé par le chariot.

Les forces qui s'exercent sur (S) sont:

- son poids $m\vec{g}$
- la réaction $\vec{R}$ du rail
- la force $\vec{F}$



Etudions le mouvement de (S) dans le repère $(O, \vec{i})$.

La R.F.D appliquée à (S) s'écrit: $m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$

Projetons cette relation sur $(O, \vec{i})$, nous obtenons:

$$\|\vec{F}\| = m\gamma \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{\|\vec{F}\|}{m}$$

Puisque $\|\vec{F}\|$ et m sont constantes, alors γ est constante. Le mouvement du chariot est rectiligne uniformément varié, et puisque le chariot part sans vitesse initiale, le mouvement est ACCELERÉ

2) Le mouvement de (S) étant rectiligne uniformément varié, sa vitesse est une fonction du premier degré en t : $v = \gamma t + v_0$

à $t = 0 \text{ s}$, $v = 0 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow v_0 = 0$ alors $v = \gamma t$

or à $t = 2 \text{ s}$, $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$ donc $\gamma = \frac{v}{t} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m.s}^{-2}$

L'accélération a pour expression: $\vec{\gamma} = 2 \vec{i}$

La R.F.D s'écrit: $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Or $m = 5 \text{ kg}$, donc $\vec{F} = 10 \vec{i}$

Cette force vaut 10 newtons.

3) La vitesse du chariot en B est $v_B = 6 \text{ m.s}^{-1}$

a) D'après la relation $v = \gamma t$, en B, $v_B = \gamma t_B$

La durée du parcours est $\Delta t = t_B - t_A = t_B$

$$t_B = \frac{v_B}{\gamma} = \frac{6}{2} = 3 \text{ s} \quad \Delta t = 3 \text{ s}$$

b) La longueur du parcours AB:

La loi horaire du mouvement s'écrit: $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$

La longueur du parcours est $L = x_B - x_A = x_B$ ($x_A = 0$)

$$L = \frac{1}{2} \gamma t_B^2 \quad ; \quad \text{A.N.: } \underline{L = AB = 9 \text{ m}}$$

Remarque: On peut utiliser pour la résolution de 3)b) la relation indépendante de t: $v_B^2 - v_A^2 = 2 \gamma (x_B - x_A)$

Exercice n° 4

Dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, un solide ponctuel est constamment soumis à deux forces: son poids $\vec{P} = m \|\vec{g}\| \vec{j}$ et une force $\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{i}$ avec $\|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{P}\|}{2}$. A la date $t = 0$ s, le solide

est en O sans vitesse initiale. La masse du solide ponctuel est $m = 0,1$ kg.

1) Déterminer l'expression de l'accélération du solide dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Quelle est l'expression de sa quantité de mouvement?

3) Quelle est l'équation de la trajectoire suivie par le solide au cours de son mouvement? Quelle est la nature de cette trajectoire?

Corrigé

Soit M le solide ponctuel. Il est soumis à deux forces qui ont, dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les expressions $\vec{P} = m \|\vec{g}\| \vec{j}$ et $\vec{F} = \frac{1}{2} m \|\vec{g}\| \vec{i}$

1) La R.F.D s'écrit: $\vec{P} + \vec{F} = m \vec{\gamma}$

Remplaçons $\vec{F}$ et $\vec{P}$ par leurs expressions, nous obtenons:

$$\frac{1}{2} m \|\vec{g}\| \vec{i} + m \|\vec{g}\| \vec{j} = m \vec{\gamma}$$

L'accélération du mouvement sera $\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| \vec{i} + \|\vec{g}\| \vec{j}$

Comme $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$ alors $\vec{\gamma} = 5 \vec{i} + 10 \vec{j}$

2) Expression de la vitesse:

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{v}$ est une primitive de $\vec{\gamma}$.

$\vec{v} = 5t \vec{i} + 10t \vec{j} + \vec{v}_0$; comme à $t = 0$ s, $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$

alors, $\vec{v} = 5t \vec{i} + 10t \vec{j}$

Par définition, la quantité de mouvement du solide ponctuel est

$$\vec{p} = m \vec{v} \implies \vec{p} = 5mt \vec{i} + 10mt \vec{j}$$

or $m = 0,1$ kg donc $\vec{p} = 0,5t \vec{i} + t \vec{j}$

3) L'équation de la trajectoire est la relation indépendante du temps entre les équations paramétriques $x = f(t)$ et

$y = h(t)$. Déterminons x et y . Pour cela, établissons l'expression du vecteur position:

$\vec{OM}$ est une primitive de $\vec{v} = 5t \vec{i} + 10t \vec{j}$; $\vec{OM} = \frac{5}{2}t^2 \vec{i} + 5t^2 \vec{j} + \vec{OM}_0$,

A $t = 0$ s, le solide est en O ($x = 0$ et $y = 0$) $\Rightarrow \vec{OM}_0 = \vec{0}$

Le vecteur espace est: $\vec{OM} = \frac{5}{2}t^2 \vec{i} + 5t^2 \vec{j}$

Puisque $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$, les lois horaires du mouvement sont:

$$x = 2,5 t^2 \quad \text{et} \quad y = 5 t^2$$

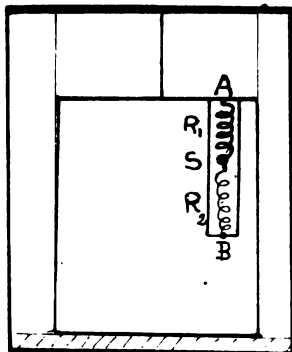
Equation de la trajectoire: de $x = 2,5 t^2$ on déduit $5t^2 = 2x$.

Remplaçons dans y , nous obtenons $y = 2x$

La trajectoire a pour équation $y = 2x$; le mouvement débute à $t = 0$ s, les coordonnées du mobile sont positives, la trajectoire est la demi-droite contenue dans le premier quadrant et portée par la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice n° 5

Un solide (S) supposé ponctuel, de masse $m = 100$ g, est relié aux deux extrémités de deux ressorts R_1 et R_2 identiques, à spires non jointives, de masse négligeable, de même longueur à vide $L_0 = 15$ cm et de constante de raideur $K = 10 \text{ N.m}^{-1}$. Les deux ressorts sont tendus entre deux points fixes A et B distants de 50 cm. (voir figure ci-contre). L'ensemble des deux ressorts est suspendu au plafond de la cabine d'un ascenseur.



1) La cabine de l'ascenseur est au repos:

- Représenter les forces qui s'exercent sur (S).
- Calculer les longueurs L_1 et L_2 des deux ressorts.

2) L'ascenseur se met en mouvement de montée. Son mouvement se compose alors de trois phases:

* Première phase: pendant les 2 premières secondes du mouvement, le solide (S) s'immobilise à 31 cm du point A.

* Deuxième phase: pendant les 10 secondes qui suivent la première phase, (S) s'immobilise à 30 cm de A.

* Troisième phase: pendant les 2 dernières secondes qui précèdent l'arrêt de l'ascenseur, (S) s'immobilise à une distance "d" constante du point A. Déterminer:

- l'accélération de l'ascenseur et la distance parcourue pendant la première phase,
- la vitesse de l'ascenseur et la distance parcourue pendant la deuxième phase,
- la distance totale parcourue par l'ascenseur et la valeur de "d".

On donne $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Corrigé

Etudions le mouvement de la cabine dans le repère $(0, \vec{i})$ fixe $\vec{i}$ étant vertical orienté vers le haut. (voir figure)

1) La cabine est au repos.

a) Le solide S est soumis à:

- * son poids $m \vec{g}$
- * la tension $\vec{T}_{01}$ de R_1
- * la tension $\vec{T}_{02}$ de R_2

b) La condition d'équilibre:

$$m \vec{g} + \vec{T}_{01} + \vec{T}_{02} = \vec{0}$$

Projetons dans le repère $(0, \vec{i})$:

$$-m \|\vec{g}\| + \|\vec{T}_{01}\| - \|\vec{T}_{02}\| = 0 \quad (1)$$

La tension d'un ressort est proportionnelle à son allongement.

$$\|\vec{T}_{01}\| = K (L_1 - L_0) \quad \text{et} \quad \|\vec{T}_{02}\| = K (L_2 - L_0)$$

$$(1) \quad -m \|\vec{g}\| + K (L_1 - L_0) - K (L_2 - L_0) = 0$$

$$-m \|\vec{g}\| + K (L_1 - L_2) = 0$$

On peut écrire:

$$\left. \begin{array}{l} L_1 + L_2 = d \\ L_1 - L_2 = \frac{m \|\vec{g}\|}{K} \end{array} \right\} \Rightarrow 2L_1 = d + \frac{m \|\vec{g}\|}{K} \quad \text{D'où:}$$

$$L_1 = \frac{d}{2} + \frac{m \|\vec{g}\|}{2K} = 0,3 \text{ m} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{d}{2} - \frac{m \|\vec{g}\|}{2K} = 0,2 \text{ m}.$$

2) La cabine est en mouvement de montée.

a) Pendant la 1^{ère} phase du mouvement:

Soit $\vec{\gamma}_1$ l'accélération du mouvement. la R.F.D s'écrit:

$$m \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m \vec{\gamma}_1$$

Par projection sur $(0, \vec{i})$: $-m \|\vec{g}\| + \|\vec{T}_1\| - \|\vec{T}_2\| = m \gamma_1$

avec $\|\vec{T}_1\| = K (L'_1 - L_0)$ et $\|\vec{T}_2\| = K (L'_2 - L_0)$

La relation devient: $-m \|\vec{g}\| + K (L'_1 - L'_2) = m \gamma_1$

L'accélération du mouvement est donc:

$$\gamma_1 = \frac{K}{m} (L'_1 - L'_2) - \|\vec{g}\| \quad (2)$$

$$\text{A.N: } \gamma_1 = \frac{10}{0,1} (0,31 - 0,19) - 10 = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

Distance parcourue par la cabine:

Le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré):

$$h_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 4 \text{ m}$$

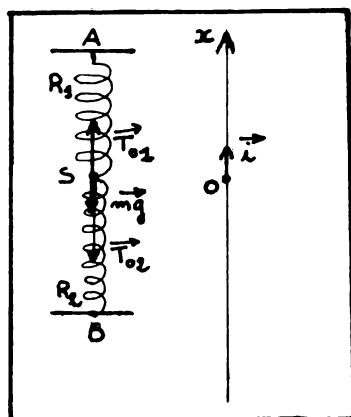
b) Vitesse de la cabine à la fin de la 1^{ère} phase:

$$v_1 = \gamma_1 \cdot t_1 = 2 \times 2 = 4 \text{ m.s}^{-1}$$

Pendant la 2^{ème} phase: AS = 30 cm, BS = 20 cm.

La relation (2) reste valable avec γ_2 , L_1 et L_2 au lieu de

γ_1 , L'_1 et L'_2 .



L'accélération sera: $\gamma_2 = \frac{K}{m} (L_1 - L_2) - \|\vec{g}\|$

$$A.N: \quad \gamma_2 = \frac{10}{0,1} \times (0,3 - 0,2) - 10 = 0 \text{ m.s}^{-2}$$

Le mouvement est rectiligne uniforme de vitesse $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$
Prenons comme origine des temps ($\theta = 0 \text{ s}$) l'instant du début de cette deuxième phase, l'équation horaire sera:

$$x = v_1 \theta + h_1$$

La distance parcourue par la cabine pendant la deuxième phase du mouvement est: $h_2 = x - h_1 = v_1 \theta$

$$A \quad \theta = 10 \text{ s}, \quad h_2 = 4 \times 10 = 40 \text{ m}$$

c) Pendant la 3^{ème} phase, $AS = d$ et $BS = AB - d$, ces deux longueurs sont constantes et ce sont les longueurs des deux ressorts. Le même raisonnement qui nous a donné la relation (2) au "2)a)" nous permet d'obtenir pour cette 3^{ème} phase:

$$\gamma_3 = \frac{K}{m} (AS - SB) - \|\vec{g}\| = \text{constante.} \quad (3)$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$\gamma_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_2}{\Delta t}$$

Or à l'arrêt, fin de la 3^{ème} phase du mouvement, $v = 0 \text{ m.s}^{-1}$
donc $\gamma_3 = \frac{0 - 4}{2} = -2 \text{ m.s}^{-2}$

La distance parcourue par la cabine pendant cette phase est h_3 telle que:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 \gamma_3 (x_f - x_i) \text{ avec } x_f - x_i = h_3 \text{ et } v_f = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

$$d'où \quad h_3 = -\frac{v_i^2}{2 \gamma_3} = 4 \text{ m.}$$

La distance totale parcourue par l'ascenseur est:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 48 \text{ m}$$

Détermination de la valeur de "d":

La relation (3): $\gamma_3 = \frac{K}{m} (AS - SB) - \|\vec{g}\|$ et les égalités $AS = d$ et $SB = AB - d$ donnent:

$$\gamma_3 = \frac{K}{m} (2d - AB) - \|\vec{g}\|$$

La longueur du ressort R_1 sera: $d = \frac{m}{2K} (\gamma_3 + \|\vec{g}\|) + \frac{AB}{2}$

$$A.N: \quad d = 0,29 \text{ m}$$

Exercice n° 6

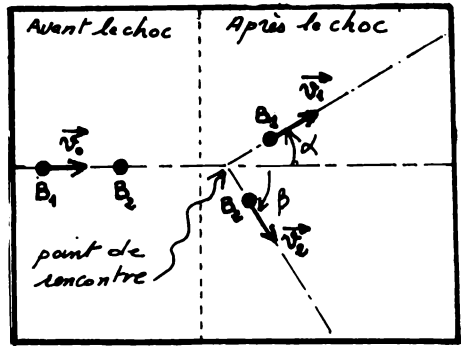
Sur un plan horizontal (H) parfaitement glissant, sont disposées deux billes B_1 et B_2 supposées ponctuelles, de même masse m . La bille B_2 est initialement au repos. La bille B_1 se déplace en direction de B_2 avec une vitesse $\vec{v}_0$ de valeur $\|\vec{v}_0\| = 2,8 \text{ m.s}^{-1}$. B_1 heurte B_2 , deux cas se posent:

*1) 1^{er} cas: Après le choc, B_1 reste collée à B_2 .

Déterminer les caractéristiques de la vitesse $\vec{V}$ de l'ensemble

$\{B_1, B_2\}$ après le choc.

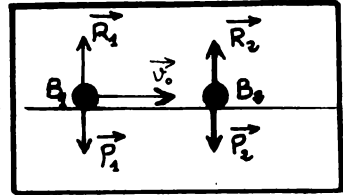
*2) 2^{ème} cas: Après le choc les deux billes se séparent. On mesure alors les angles de déviation par rapport à la direction de $\vec{v}_0$ (de B_1), on trouve: (voir figure)
 $\alpha = 30^\circ$ pour la direction prise par B_1
 $\beta = 60^\circ$ pour la direction prise par B_2



Calculer les valeurs des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ juste après le choc.

Corrigé

Soit le système formé par les deux billes. Dans tout le problème, chaque bille est soumise seulement à son poids et à la réaction du plan lisse. Ce sont deux forces opposées et leur somme est nulle: Le système des deux billes est alors "isolé", il conserve donc sa quantité de mouvement.



1) Après le choc, B_1 et B_2 restent accolées

Quantité de mouvement avant le choc: $\vec{p}_1 = m \vec{v}_0$

Quantité de mouvement après le choc: $\vec{p}_2 = 2m \vec{v}$
 or $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \Rightarrow 2m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{2}$

$\vec{v}$ a même direction et même sens que $\vec{v}_0$. Sa norme est :

$$\|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{v}_0\|}{2} = 1,4 \text{ m.s}^{-1}$$

* 2) Après le choc, les billes se séparent.

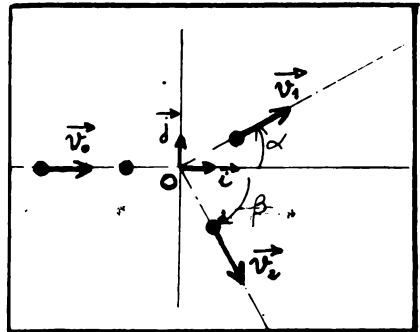
* Quantité de mouvement avant le choc:

$$\vec{p}_1 = m \vec{v}_0$$

* Quantité de mouvement après le choc:

$$\vec{p}_2 = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



Projetons cette relation vectorielle dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, nous obtenons:

$$\text{* sur } (0, \vec{i}): \quad \|\vec{v}_0\| = \|\vec{v}_1\| \cos \alpha + \|\vec{v}_2\| \cos \beta$$

$$\text{* sur } (0, \vec{j}): \quad 0 = \|\vec{v}_1\| \sin \alpha - \|\vec{v}_2\| \sin \beta$$

$$\text{avec} \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2}$$

La résolution de ce système donne:

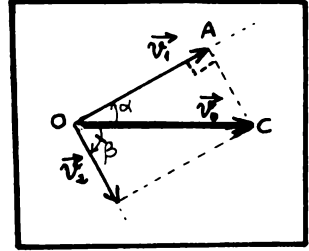
$$\|\vec{v}_1\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\vec{v}_0\| \quad \text{et} \quad \|\vec{v}_2\| = \frac{1}{2} \|\vec{v}_0\|$$

$$\text{A.N:} \quad \|\vec{v}_1\| = 1,4 \sqrt{3} = 2,43 \text{ m.s}^{-1} \quad ; \quad \|\vec{v}_2\| = 1,4 \text{ m.s}^{-1}$$

REMARQUE:

La relation $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ montre que le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est la somme des deux vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

Or $\alpha + \beta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$; le triangle OAC est donc un triangle rectangle en A (voir figure)



Dans ce triangle, on peut écrire:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OC} = \frac{\|\vec{v}_1\|}{\|\vec{v}_0\|} \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_0\| \cos \alpha \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\vec{v}_0\|$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{\|\vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_0\|} \Rightarrow \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \Rightarrow \|\vec{v}_2\| = \frac{1}{2} \|\vec{v}_0\|$$

5- ACTION D'UN CHAMP ELECTRIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGEE EN MOUVEMENT

N.B: Dans les exercices de ce chapitre, on considèrera toujours que les vitesses des particules sont faibles devant celle de la lumière dans le vide et on appliquera les lois de la mécanique classique.

Pour un électron, un ion ou un proton, le poids est négligeable devant la force électrique due à un champ électrique.

La masse d'un électron est: $m_e \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

La masse d'un proton est: $m_p \approx 1 \text{ u} \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

La charge électrique élémentaire est: $e \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Exercice n° 1

1) Une cathode C émet des électrons avec une vitesse initiale négligeable. Quels doivent être le sens et la valeur d'un champ électrique uniforme régnant entre cette cathode et une anode A pour que les électrons atteignent A avec une vitesse de $3 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$, sachant que la distance entre C et A est $d = 2 \text{ cm}$? Calculer la tension U_{AC} .

2) Calculer de deux manières différentes la durée du parcours CA pour les électrons émis par C.

Corrigé

1) Une particule chargée, placée dans un champ électrique de vecteur $\vec{E}$, subit une force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$. Dans le cas d'un électron, la charge électrique est $q = -e$ et $\vec{F} = -e \vec{E}$

Considérons un électron émis par la cathode C. Entre C et l'anode A règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$. La force électrique est dirigée de C vers A et la charge q est négative donc $\vec{E}$ est orienté de A vers C.

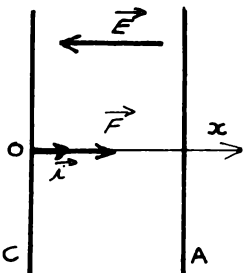
Appliquons la R.F.D à un électron émis. Soit $\vec{p}$ la quantité de mouvement de cet électron, la R.F.D s'écrit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -e \vec{E} = m \vec{\gamma}$$

Soit O le point de départ de l'électron émis et $(0, i)$ un repère de base i colinéaire à $\vec{E}$. Soit $t = 0 \text{ s}$ l'instant de départ de l'électron en O.

$$m \vec{\gamma} = \vec{F} = -e \cdot (-\|\vec{E}\| \cdot i) = e \cdot \|\vec{E}\| \cdot i$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} i \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} t \cdot i + \vec{v}_0 = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} t \cdot i \quad (\vec{v}_0 = 0)$$



Soit M la position de l'électron à un instant t.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\|\vec{E}\|}{m} t^2 \vec{i} + \vec{OM}_0 = \frac{1}{2} \frac{e\|\vec{E}\|}{m} t^2 \vec{i} \quad (\vec{OM}_0 = \vec{0})$$

Le vecteur position a une seule coordonnée, donc le mouvement de l'électron est rectiligne. De plus, l'accélération de ce mouvement est constante donc le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré car $v_0 = 0$).

La relation entre les vitesses et les abscisses, indépendante du temps, s'écrit:

$$v_A^2 - v_C^2 = 2\gamma(x_A - x_C) = 2\gamma \cdot d = 2 \frac{e\|\vec{E}\|}{m} d$$

Comme x_C et v_C sont nulles, la relation précédente donne:

$$v_A^2 = 2 \frac{e\|\vec{E}\|}{m} d \quad \text{d'où} \quad \|\vec{E}\| = \frac{m \cdot v_A^2}{2 \cdot e \cdot d}$$

A.N: Avec les données de l'énoncé et les données de la page 36

$$\|\vec{E}\| = 1,27 \times 10^3 \text{ V.m}^{-1}$$

Le champ électrique étant uniforme, on a: $U_{AC} = \|\vec{E}\| \cdot d$

$$\text{A.N:} \quad U_{AC} = 25,4 \text{ V}$$

2) Calculons la durée du parcours CA.

a) 1^{ère} méthode:

$$v_A = \gamma \cdot t_A \implies t_A = \frac{v_A}{\gamma} = \frac{v_A \cdot m}{e \cdot \|\vec{E}\|}$$

L'électron ayant été émis en C à l'origine des temps, la date d'arrivée en A (t_A) est égale à la durée du parcours CA.

$$\text{A.N:} \quad T_{CA} = t_A = 1,33 \times 10^{-8} \text{ s.}$$

b) 2^{ème} méthode:

Utilisons l'équation horaire du mouvement $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$

$$\text{En A:} \quad x_A = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t_A^2 \implies t_A = \sqrt{\frac{2 \cdot x_A}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot m}{e \|\vec{E}\|}}$$

$$\text{A.N:} \quad T_{CA} = t_A = 1,33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Exercice n°2

Des électrons sont émis par une plaque métallique C avec une vitesse valant $4 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$. On veut que ces électrons atteignent une plaque A avec une vitesse nulle. La distance entre C et A est $d = 5 \text{ mm}$.

1) Déterminer la valeur algébrique de la tension U_{AC} qu'il faut appliquer entre les plaques C et A pour obtenir le freinage désiré, en supposant que le champ électrique est uniforme entre C et A. Déterminer aussi le sens et la valeur de ce champ électrique.

2) Calculer la durée du parcours $\overrightarrow{CA}$ des électrons émis par la plaque C.

3) Déterminer la nature et la durée du mouvement ultérieur des électrons après leur arrêt en A.

Masse et charge d'un électron : voir page 36

Corrigé

1) Considérons un électron émis par la plaque C en un point O, à l'instant $t = 0$ s, avec une vitesse $\vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \cdot \vec{i}$ perpendiculaire à la plaque C. Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le champ électrique $\vec{E}$ entre C et A est uniforme, donc l'électron est soumis dans cet espace à une force électrique constante $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$. Déterminons la direction et le sens de $\vec{E}$. La R.F.D s'écrit: $\vec{F} = m \vec{\gamma}$, l'accélération du mouvement de l'électron est: $\vec{\gamma} = \frac{-e \cdot \vec{E}}{m}$ (m = masse de l'électron).

$\vec{\gamma}$ est constante; ses composantes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont constantes.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \gamma_x \cdot t \cdot \vec{i} + \gamma_y \cdot t \cdot \vec{j} + \gamma_z \cdot t \cdot \vec{k} + \vec{v}_0, \quad (\vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \vec{i})$$

A la date t_1 , l'électron atteint A avec une vitesse nulle:

$$\vec{0} = \gamma_x \cdot t_1 \cdot \vec{i} + \gamma_y \cdot t_1 \cdot \vec{j} + \gamma_z \cdot t_1 \cdot \vec{k} + \|\vec{v}_0\| \cdot \vec{i}$$

Cette égalité n'est possible que si et seulement si:

$$\begin{cases} \gamma_z = \gamma_y = 0 \\ \text{et} \\ \gamma_x = - \frac{\|\vec{v}_0\|}{t_1} \end{cases}$$

L'accélération est colinéaire et de sens opposé à $\vec{v}_0$. La force $\vec{F} = m \vec{\gamma}$ est donc aussi colinéaire et opposée à $\vec{v}_0$. La charge de l'électron étant négative, $\vec{E}$ est colinéaire et de sens contraire à $\vec{F}$, d'où ce champ est colinéaire et de même sens avec la vitesse d'émission $\vec{v}_0$ et avec $\vec{i}$. L'accélération s'écrit

$$\vec{\gamma} = \frac{-e \cdot \vec{E}}{m} = \frac{-e \cdot \|\vec{E}\|}{m} \vec{i}$$

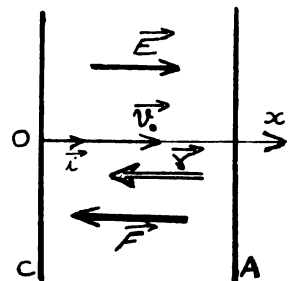
Le vecteur champ $\vec{E}$ est orienté du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé donc $U_{AC} < 0$ et $\|\vec{E}\| = \frac{U_{CA}}{d}$.

Etudions le mouvement de l'électron entre C et A

$$\vec{\gamma} = \frac{-e \cdot U_{CA}}{m \cdot d} \cdot \vec{i} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vitesse de l'électron à un instant t :

$$\vec{v} = \frac{-e \cdot U_{CA}}{m \cdot d} t \cdot \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \cdot \vec{i}$$



$\vec{\gamma}$ est constante; $\vec{\gamma}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc le mouvement de l'électron est rectiligne uniformément varié.
Appliquons la relation indépendante du temps entre les vitesses et les abscisses:

$$v^2 - v_0^2 = 2 (x - x_0) \cdot \gamma$$

En A, la vitesse est nulle:

$$0 - v_0^2 = 2 \gamma (x_A - x_C) = 2 \gamma d$$

$$-v_0^2 = \frac{-2 \cdot e \cdot U_{CA}}{d \cdot m} \cdot d \implies U_{CA} = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot e}$$

$$\text{A.N: } U_{CA} = \frac{9 \times 10^{-31} \times 16 \times 10^{10}}{2 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 45 \times 10^{-2} \text{ V} = 0,45 \text{ V}$$

Le champ électrique entre C et A a pour valeur:

$$\|\vec{E}\| = \frac{U_{CA}}{d} = \frac{0,45}{5 \times 10^{-3}} = 90 \text{ V.m}^{-1}$$

2) Durée du parcours C → A

Utilisons l'expression de la vitesse à un instant t :

$$\vec{v} = -\frac{e \cdot U_{CA}}{d \cdot m} \cdot t \cdot \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \vec{i}$$

Cette vitesse s'annule à la date t_1 lorsque l'électron atteint la plaque A.

$$-\frac{e \cdot U_{CA}}{d \cdot m} t_1 + \|\vec{v}_0\| = 0 \implies t_1 = \frac{d \cdot m \cdot \|\vec{v}_0\|}{e \cdot U_{CA}}$$

$$\text{A.N: } t_1 = \frac{5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{-31} \times 4 \times 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,45} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

La durée du parcours de l'électron de C à A est donc égale à 25 nanosecondes, c'est une durée extrêmement petite.

3) L'électron atteint la plaque A avec une vitesse nulle. Que sera son mouvement ultérieur ?

Le poids de l'électron étant négligeable devant la force électrique, l'électron reste soumis seulement à la même force électrique qu'il a subie pendant son passage de C vers A, donc son mouvement ultérieur après son arrêt instantané en A n'est autre que la deuxième phase du mouvement rectiligne uniformément varié dont le parcours C → A a représenté la première phase (phase retardée).

L'expression de la vitesse instantanée, établie au "1)" reste valable :

$$\vec{v} = -\frac{e \cdot U_{CA}}{m \cdot d} \cdot t \cdot \vec{i} + \vec{v}_0$$

La deuxième phase correspond à $t > t_1$ ($t_1 = 25 \text{ ns}$), on a alors $v < 0$; or $\gamma < 0$, donc v et γ ont même signe, cela veut dire que les vecteurs vitesse et accélération ont le même sens: le mouvement de l'électron de A vers C est rectiligne uniformément accéléré.

L'équation horaire du mouvement est:

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_{CA}}{m \cdot d} t^2 + \|\vec{v}_0\| \cdot t$$

L'arrivée de l'électron en C se fait à l'instant de date t_2 (définie dans le repère de temps ayant pour origine l'instant de départ de l'électron en O). La date t_2 correspond à $x = 0$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_{CA}}{m \cdot d} \cdot t_2^2 + \|\vec{v}_0\| \cdot t_2 = 0$$

Cette équation admet deux racines:

$t_2' = 0$ s (à rejeter car t_2 est strictement positive)

$$t_2'' = \frac{2 \cdot \|\vec{v}_0\| \cdot m \cdot d}{e \cdot U_{CA}}$$

$$A.N: t = 5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

La durée du trajet A → C est égale à $t_2 - t_1 = 2,5 \times 10^{-8} \text{ s}$

Exercice n° 3

On dispose de deux grilles métalliques G_1 et G_2 parallèles verticales distantes de $d = 5 \text{ cm}$. On établit une tension positive constante $U_{G_1 G_2} = V_{G_1} - V_{G_2}$ valant 8×10^4 volts. Entre ces deux grilles règne un vide très poussé. On fait arriver en un trou O de la grille G_1 un pinceau très fin de protons animés d'une vitesse $\vec{v}_{O \rightarrow}$ valant $4 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ et faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'axe $(O, \vec{i})$ horizontal. Un proton pénétrant ainsi par O sort en un point O' de la grille G_2 avec une vitesse $\vec{v}_{O'}$, faisant un angle β avec $(O', \vec{i})$ (voir figure).

1) Etudier le mouvement d'un proton dans l'espace séparant les deux grilles. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

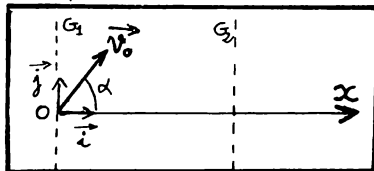
2) Déterminer l'ordonnée du point O'.

3) Déterminer les caractéristiques de la vitesse $\vec{v}_{O'}$.

4) Montrer que $\sin \alpha = k \cdot \sin \beta$. Calculer numériquement la valeur de la constante k.

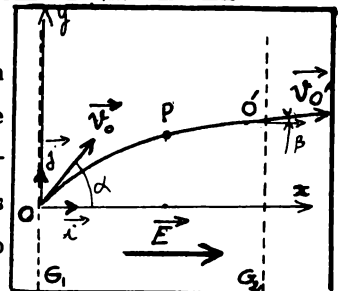
Masse et charge d'un proton :

voir page 36.



Corrigé

1) $U = V_{G_1} - U_{G_2} > 0$, cette tension engendre un champ électrique uniforme entre les deux grilles, de vecteur $\vec{E}$ perpendiculaire aux plans des deux grilles et orienté de G_1 à G_2 . La valeur du champ



électrique $\vec{E}$ est: $\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$

Dans le repère Oxy de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), le vecteur $\vec{E}$ s'écrit:

$$\vec{E} = \|\vec{E}\| \cdot \vec{i} = \frac{U}{d} \cdot \vec{i}$$

Considérons un proton pénétrant dans le champ électrique au point O à l'instant $t = 0$ s.

Le poids du proton (dont la valeur est de l'ordre de 10^{-26} N) est absolument négligeable devant la force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$ (dont la valeur est de l'ordre de 10^{-13} N).

Appliquons la R.F.D au proton:

$\vec{p}$ étant la quantité de mouvement du proton à un instant t quelconque, on a:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{\gamma} \quad (\vec{\gamma} \text{ étant l'accélération du mouvement}) \text{ et:}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \cdot \|\vec{E}\| \cdot \vec{i} = q \cdot \frac{U}{d} \cdot \vec{i}$$

L'accélération du mouvement du proton s'écrit:

$$\vec{\gamma} = \frac{q \cdot U}{d \cdot m} \vec{i}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{v} = \frac{q \cdot U}{d \cdot m} \cdot t \vec{i} + \vec{v}_0$$

A $t = 0$ s, on a: $\vec{v}_0 = \vec{v}_O = \|\vec{v}_0\| \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j}$

$$\text{d'où: } \vec{v} = \frac{q \cdot U}{d \cdot m} \cdot t \cdot \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \cos \alpha \cdot \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

La charge du proton est $q = e = + 1,6 \times 10^{-19}$ C donc:

$$\vec{v} = \left(\frac{e \cdot U}{d \cdot m} \cdot t + \|\vec{v}_0\| \cdot \cos \alpha \right) \vec{i} + (\|\vec{v}_0\| \cdot \sin \alpha) \vec{j}$$

soit P la position du proton à un instant t dans le repère Oxy de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), on a:

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OP})}{dt}$$

$$\text{d'où } \vec{OP} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{d \cdot m} t^2 + \|\vec{v}_0\| \cdot \cos \alpha \cdot t \right) \vec{i} + (\|\vec{v}_0\| \cdot \sin \alpha \cdot t) \vec{j} + \vec{OP}_0$$

A $t = 0$ s, le proton est en O donc $\vec{OP}_0 = \vec{O}$

Les coordonnées du proton à un instant t entre G_1 et G_2 sont:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{d \cdot m} t^2 + \|\vec{v}_0\| \cdot \cos \alpha \cdot t & (1) \\ y = \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \cdot t & (2) \end{cases}$$

$$\text{De l'égalité (2) on tire: } t = \frac{y}{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha} \quad (3)$$

Portons (3) dans l'équation (1), nous obtenons:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + \cot \alpha \cdot y$$

de la forme $x = A y^2 + B y$

La trajectoire du proton est une portion d'une parabole dont le sommet est O et l'axe de symétrie est colinéaire à $\vec{i}$.

A.N: $x = 9,58 y^2 + y$

2) Soit O' le point où le proton quitte l'espace champ électrique en émergeant par la grille G₂. Les coordonnées du point O' sont: $x = d = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ et y solution de l'équation $A y^2 + B y = d$

$$9,58 y^2 + y - 0,05 = 0$$

Cette équation du second degré admet une racine réelle positive $y = 0,037 \text{ m}$ et une racine réelle négative à rejeter car le mouvement du proton se fait du côté des y positifs.

Les protons émergent au point O' ($x = 5 \text{ cm}$; $y = 3,7 \text{ cm}$).

3) Pour trouver les caractéristiques du vecteur vitesse du proton au point O', déterminons la date à laquelle le proton atteint ce point de G₂ puis remplaçons t par son expression dans l'expression de la vitesse de cette particule.

En O' $x = d \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{e U}{m d} t^2 + \|\vec{v}_0\| \cos \alpha t - d = 0$

$$\Delta = v_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{2 e U d}{m d} > 0$$

Le discriminant est positif; l'équation admet deux racines:

$$t_1 = \frac{-\|\vec{v}_0\| \cos \alpha + \sqrt{\Delta}}{\frac{e U}{m d}} > 0 \text{ (acceptable)}$$

$$t_2 = \frac{-\|\vec{v}_0\| \cos \alpha - \sqrt{\Delta}}{\frac{e U}{m d}} < 0 \text{ (à rejeter)}$$

Remplaçons t par t₁ dans l'expression de $\vec{v}$:

$$\vec{v}_{O'} = \left[\left(\frac{e U}{m d} \times \frac{-\|\vec{v}_0\| \cos \alpha + \sqrt{\Delta}}{\frac{e U}{m d}} \right) + \|\vec{v}_0\| \cos \alpha \right] \cdot \vec{i} + (\|\vec{v}_0\| \sin \alpha) \cdot \vec{j}$$

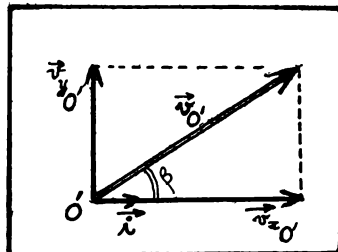
$$\vec{v}_{O'} = \sqrt{\Delta} \vec{i} + \|\vec{v}_0\| \sin \alpha \vec{j}$$

$$v_{xO'} = \sqrt{\frac{2 e U}{m} + v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$v_{yO'} = \|\vec{v}_0\| \sin \alpha$$

Soit β l'angle ($\vec{i}$, $\vec{v}_{O'}$) :

$$\text{tg } \beta = \frac{v_{yO'}}{v_{xO'}} = \frac{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha}{\sqrt{\frac{2 e U}{m} + \|\vec{v}_0\|^2 \cos^2 \alpha}}$$



A.N: $\text{tg } \beta = 0,59 \Rightarrow \beta = 30,5^\circ$

calculon. La valeur du vecteur vitesse $\vec{v}_0$: pour cela faisons appel au théorème de Pythagore.

$$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{\frac{2 e U}{m} + v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}$$

$$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{\frac{2 e U}{m} + v_0^2}$$

$$\text{A.N: } \|\vec{v}_0\| = 5,6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

Le proton sort de la grille G_2 au point O' avec une vitesse $\vec{v}_0$, valant $5,6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ et faisant un angle de $30,5^\circ$ avec le vecteur $\vec{i}$. Le champ électrique a accéléré le proton et il a dévié sa trajectoire.

4) Considérons l'expression de $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \frac{v_{y0'}}{\|\vec{v}_0'\|} = \frac{\|\vec{v}_0\| \sin \alpha}{\sqrt{\frac{2 e U}{m} + v_0^2}} = \sin \alpha \cdot \frac{\|\vec{v}_0\|}{\sqrt{\frac{2 e U}{m} + v_0^2}} = k \sin \alpha$$

Cette expression montre que l'angle d'incidence α et l'angle d'émergence β sont reliés par la relation $\sin \beta = k \sin \alpha$, (k constante puisque $\|\vec{v}_0\|$, e , U et m sont constantes).

Numériquement: $k = 0,714$

L'élève pourra remarquer l'analogie avec la réfraction de la lumière.

Exercice n° 4

On se propose dans cet exercice d'étudier l'utilisation d'un oscilloscope électronique pour la mesure d'une tension continue (d.d.p) électrique U .

Dans un tube où règne un vide très poussé, un dispositif approprié donne un faisceau très mince d'électrons animés d'une vitesse horizontale $\vec{v}_0$ valant $2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

Ce faisceau d'électrons pénètre en O entre deux plateaux P_1 et P_2 horizontaux carrés de côté $L = 6 \text{ cm}$, distants de $d = 4 \text{ cm}$. Le point O est à égale distance de P_1 et P_2 . Entre ces deux plateaux, on établit la tension continue U à mesurer ($U_{P_1 P_2}$).

Après leur sortie en S de l'espace champ électrique existant entre les deux plateaux, les électrons poursuivent leur mouvement vers un écran vertical situé à la distance $D = IO' = 20 \text{ cm}$ du centre de symétrie I de l'espace champ (voir figure).

1) Etudier le mouvement d'un électron entre P_1 et P_2 .

Etablir l'équation de la trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

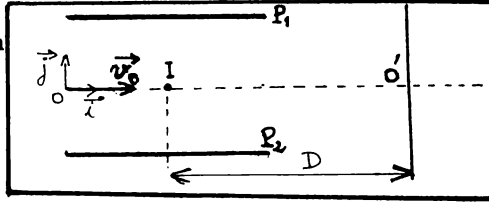
2) Les électrons sortent de l'espace champ électrique régnant entre les plateaux, au point S . Quelles sont la nature et la trajectoire du mouvement des électrons entre le point d'émergence S et l'écran ?

3) Montrer que l'ordonnée Y du point d'impact des électrons sur l'écran est proportionnelle à la valeur de la tension U appliquée entre P_1 et P_2 . On appelle "sensibilité verticale"

le rapport constant " U / Y ". Calculer la sensibilité verticale de l'oscilloscope considéré.

Masse et charge d'un électron:

voir page 36



Corrigé

1) Considérons un électron pénétrant à l'instant $t = 0$ s au point O dans l'espace champ électrostatique.

Le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique

$\vec{F} = q \vec{E}$. La tension $U_{P_1 P_2}$ est positive donc le champ $\vec{E}$ est orienté de P_1 vers P_2 ; la charge de l'électron est négative donc la force électrique $\vec{F}$ est opposée au

vecteur champ $\vec{E}$. Cette force a pour expression:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -e \cdot \vec{E} = -e (- \| \vec{E} \| \cdot \vec{j}) = e \| \vec{E} \| \cdot \vec{j} = e \frac{U}{d} \vec{j}$$

Appliquons la R.F.D à l'électron considéré.

$\vec{p}$ étant la quantité de mouvement de l'électron à un instant t en une position M, la R.F.D s'écrit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{\gamma} = \frac{e \cdot U}{d} \vec{j}$$

L'accélération du mouvement de l'électron est donc:

$$\vec{\gamma} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{e \cdot U}{d \cdot m} \cdot \vec{j}$$

La vitesse de l'électron à une date t est une primitive de l'accélération:

$$\vec{v} = \frac{e \cdot U}{d \cdot m} \cdot t \vec{j} + \vec{v}_0 = \frac{e \cdot U}{d \cdot m} \cdot t \vec{j} + \| \vec{v}_0 \| \vec{i}$$

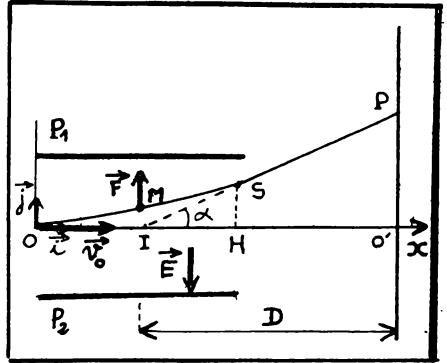
La vitesse est la dérivée du vecteur position $\vec{OM}$ par rapport au temps donc le vecteur position est une primitive de $\vec{v}$:

$$\vec{OM} = \| \vec{v}_0 \| \cdot t \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2 \vec{j} + \vec{OM}_0$$

A la date $t = 0$ s, l'électron est en O, donc $\vec{OM}_0 = \vec{0}$ et le vecteur espace s'écrit: $\vec{OM} = \| \vec{v}_0 \| t \vec{i} + \frac{1}{2} \frac{e \cdot U}{m \cdot d} t^2 \vec{j}$

Les coordonnées du vecteur espace $\vec{OM}$ à une date t sont :

$$x = \| \vec{v}_0 \| t \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2$$



En éliminant t entre x et y , nous obtenons l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y = \frac{1}{2} \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} x^2$$

Cette équation est de la forme $y = A x^2$, la trajectoire de l'électron est donc une portion d'une parabole de sommet O et admettant $\vec{Ox}$ comme axe de symétrie.

$$A.N: \quad y = (5,55 \times 10^{-3} U) x^2$$

2) Pour une particule animée d'une vitesse $\vec{v}$ de l'ordre de 10^7 m.s^{-1} , l'effet du poids est négligeable, il ne produit qu'une déviation verticale de l'ordre de 10^{-13} m pour un parcours horizontal de 1 m ! (($x = v \cdot t$; $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$)). Nous concluons qu'après sa sortie en S de l'espace champ électrique, l'électron considéré est pratiquement " isolé ". Sa quantité de mouvement $\vec{p} = m \vec{v}$ est alors constante et puisque la masse de l'électron est constante, sa vitesse $\vec{v}$ est aussi constante, c'est la vitesse de l'électron en S . Le mouvement de l'électron entre S et l'écran est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_S$. La trajectoire de l'électron est le support de $\vec{v}_S$, c'est donc la tangente en S à la parabole que l'électron a parcourue entre P_1 et P_2 . Soit (D) cette trajectoire rectiligne.

3) Le faisceau d'électrons frappe l'écran au point P . Déterminons l'intersection de (D) avec l'axe $\vec{Ox}$: dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la parabole est $y_{(P)} = A x^2$, celle

de (D) est $y_{(D)} = A'x + B'$ avec A' dérivée de $y_{(P)}$ par rapport à x pour $x = L$ donc $A' = 2 A L$

$$y_{(D)} = 2 A L x + B' ;$$

(D) passe par $S (L ; A L^2) \iff A L^2 = 2 A L \cdot L + B'$ d'où: $B' = - A L^2$ et l'équation de (D) est $y_{(D)} = 2 A L x - A L^2$

L'intersection de (D) avec l'axe $\vec{Ox}$ correspond à $y_{(D)} = 0$

c-à-d $x = \frac{L}{2}$; le prolongement de (D) coupe Ox au point I .

Etablissons l'expression de l'ordonnée $Y = O'P$ du point d'impact des électrons sur l'écran

*** PREMIERE METHODE :

Appliquons le théorème de Thalès pour les triangles ISH et IPO'

$$\frac{IH}{IO'} = \frac{SH}{PO'} \iff \frac{L/2}{D} = \frac{y_S}{Y} \iff Y = \frac{2 y_S \cdot D}{L}$$

$$x_S = L \implies y_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot L^2$$

$$Y = \frac{2 \cdot D}{L} \cdot y_S = \frac{2 \cdot D}{L} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot L^2 = \frac{e \cdot D \cdot L}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot U$$

*** DEUXIEME METHODE :

Le coefficient directeur de la droite (D) tangente en S à la parabole est égale à la dérivée de y par rapport à x pour $x = L$ et cette dérivée est égale à la tangente de l'angle α que fait la droite (D) avec Ox.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{e \cdot U \cdot L}{m \cdot d \cdot v_0^2} \quad \text{or} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{O'P}{IO'} = \frac{Y}{D}$$

($x = L$)

$$Y = D \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{e \cdot D \cdot L}{m \cdot d \cdot v_0^2} U$$

Nous voyons que Y est proportionnelle à U puisque e, D, L, m, d et $\| \vec{v}_0 \|$ sont des constantes pour le dispositif dans les conditions de son utilisation.

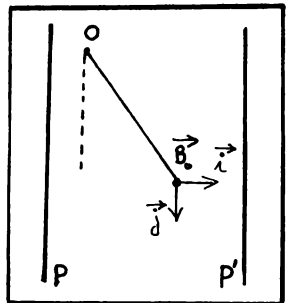
Calculons la "sensibilité verticale" de l'oscilloscope dans les conditions de l'énoncé:

$$S_V = \frac{U}{Y} = \frac{m \cdot d \cdot v_0^2}{e \cdot D \cdot L}$$

$$\text{A.N: } S_V = 7500 \text{ V.m}^{-1} = 75 \text{ V.cm}^{-1}$$

Exercice n° 5

1) Une petite boule isolante, pratiquement ponctuelle, de masse $m = 0,01 \text{ kg}$, est attachée au bout d'un fil isolant de masse négligeable et de longueur $L = 0,1 \text{ m}$. La boule porte une charge électrique q. On place l'ensemble (fil + boule) entre deux plateaux métalliques parallèles verticaux P et P' distants de $d = 5 \text{ cm}$, l'extrémité supérieure O du fil se trouvant à $0,5 \text{ cm}$ de P. On établit entre P et P' une tension $U = V_P - V_{P'} = + 5 \text{ kV}$; le fil



s'immobilise dans une position faisant un angle de 15° avec la verticale, la boule occupant alors la position B_0 . Calculer q.

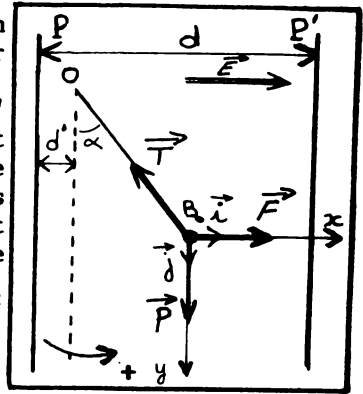
2) On brûle le fil à l'instant $t = 0 \text{ s}$. Etudier le mouvement de la boule dans le repère $(B_0, \vec{i}, \vec{j})$. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire. Déterminer la date où la boule heurte le plateau P'.

On prendra pour la pesanteur: $\| \vec{g} \| = 10 \text{ N.kg}^{-1}$

Corrigé

1) Considérons la boule pratiquement ponctuelle en équilibre au bout du fil isolant entre les plateaux P et P'.

Entre les plateaux P et P' régnent un champ électrique uniforme de vecteur $\vec{E}$ orienté de P vers P' puisque $U_{PP'}$ est positive. Le schéma accompagnant l'énoncé et qui est reproduit ci-contre montre que le fil est incliné de P vers P' donc la force électrique agissant sur la boule chargée est orientée de P vers P' : $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont de même sens :



la charge q est positive.

La boule est soumise à son poids $\vec{P}$, à la force électrique $\vec{F}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil. La condition d'équilibre pour la boule s'écrit : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ (1)

Projetons (1) sur $(B_0, \vec{i})$: $\|\vec{F}\| - \|\vec{T}\| \sin \alpha = 0$ (2)

Projetons (1) sur $(B_0, \vec{j})$: $\|\vec{P}\| - \|\vec{T}\| \cos \alpha = 0$ (3)

Nous déduisons de (2) et (3) :

$$\frac{\|\vec{T}\| \cdot \sin \alpha}{\|\vec{T}\| \cdot \cos \alpha} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{q \cdot \|\vec{E}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{q \cdot U}{\|\vec{P}\| d} = \tan \alpha$$

La charge électrique portée par la boule est donc :

$$q = \frac{\|\vec{P}\| \cdot d \cdot \tan \alpha}{U} = \frac{m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d \cdot \tan \alpha}{U}$$

$$\text{A.N : } q = \frac{10^{-2} \times 10 \times 5 \times 10^{-2} \times 0,27}{5 \times 10^3} = 2,7 \times 10^{-7} \text{ C}$$

2) On brûle le fil à l'instant de date $t = 0$ s.

A partir de cet instant, la boule n'est soumise qu'à son poids $\vec{P}$ et à la force électrique $\vec{F}$.

Appliquons la R.F.D à la boule :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{\gamma} = \vec{F} + \vec{P} = \|\vec{P}\| \cdot \vec{j} + q \frac{U}{d} \cdot \vec{i}$$

L'accélération du mouvement de la boule est :

$$\vec{\gamma} = \frac{\|\vec{P}\|}{m} \cdot \vec{j} + \frac{q \cdot U}{d \cdot m} \cdot \vec{i} = \|\vec{g}\| \cdot \vec{j} + \frac{q \cdot U}{d \cdot m} \cdot \vec{i}$$

C'est une accélération constante.

La vitesse instantanée de la boule est une primitive de $\vec{\gamma}$:

$$\vec{v} = \|\vec{g}\| \cdot t \cdot \vec{j} + \frac{q \cdot U}{d \cdot m} t \cdot \vec{i} + \vec{v}_0$$

A $t = 0$ s, la vitesse de la boule est nulle, donc $\vec{v}_0 = \vec{0}$ et la vitesse à une date $t > 0$ s s'écrit : $\vec{v} = \|\vec{g}\| \cdot t \cdot \vec{j} + \frac{q \cdot U}{d \cdot m} t \cdot \vec{i}$

Soit B la position de la boule à $t > 0$ s dans le repère $(B_0, \vec{i}, \vec{j})$

Le vecteur position de la boule est une primitive de la vitesse

$$\vec{B_0B} = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| t^2 \vec{j} + \frac{1}{2} \frac{q \cdot U}{d \cdot m} t^2 \vec{i} + \vec{B_0B_0} \quad (\vec{B_0B_0} = \vec{0})$$

Les composantes du vecteur position $\vec{B_0B}$ dans le repère $(B_0, \vec{i}, \vec{j})$

sont:
$$x = \frac{1}{2} \frac{q \cdot U}{d \cdot m} t^2 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| t^2 \quad (2)$$

Divisons membre à membre, nous obtenons:
$$\frac{y}{x} = \frac{\|\vec{g}\| \cdot m \cdot d}{q \cdot U}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire de la boule est:

$$y = \frac{m \cdot \|\vec{g}\| \cdot d}{q \cdot U} x \quad ; \quad \text{A.N:} \quad y = 3,73 x$$

La trajectoire de la boule est un segment de droite porté par la demi-droite $[B_0 u)$; l'accélération du mouvement de la boule est constante. Le mouvement est donc rectiligne uniformément varié (accéléré puisque la vitesse initiale est nulle.)

Soit β l'angle que fait la trajectoire avec $B_0 y$, on a:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{y} = \frac{q \cdot U}{d \cdot m \cdot \|\vec{g}\|} = \operatorname{tg} \alpha$$

La demi-droite $[B_0 u)$ est le prolongement du segment de droite $[OB_0]$ matérialisé par le fil isolant en équilibre avant sa rupture.

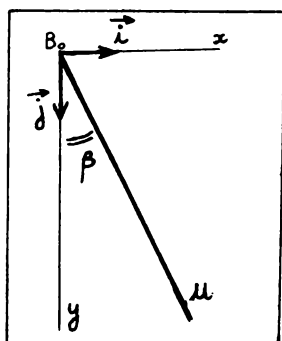
La boule heurte le plateau P' en un point C d'abscisse $x_C = d - d' - L \sin \alpha$

A.N: $x_C = 1,91 \times 10^{-2} \text{ m}$

Le choc de la boule avec le plateau P' a lieu à la date t telle que:

$$x_C = \frac{1}{2} \times \frac{q \cdot U}{m \cdot d} t^2 \quad \text{d'où:} \quad t = \sqrt{\frac{2 m \cdot d \cdot x_C}{q \cdot U}}$$

A.N: $t = 0,119 \text{ s.}$

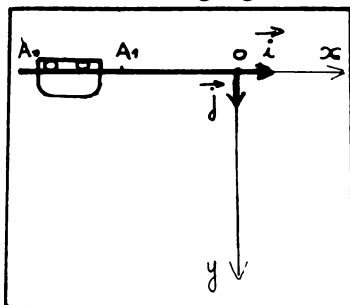


6- R.F.D: SOLIDES EN TRANSLATION

Exercice n° 1

Les parties I et II sont indépendantes. Pour tout le problème on prendra $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$; les frottements sont négligeables.

I) On dispose d'un rail sur lequel peut se déplacer un mobile ayant la forme d'un chariot de masse M . Le rail étant horizontal, le chariot est lancé depuis l'extrémité A_0 du rail avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. A_0 sera pris comme origine des espaces ($x = 0$) pour le mouvement sur le rail.



1) Pour parcourir une distance $x_1 = A_0 A_1 = 0,20 \text{ m}$, le chariot met un temps $t_1 = 0,36 \text{ seconde}$ (mesuré à $0,01 \text{ s}$ près)

a) Déterminer le temps mis par le chariot pour parcourir une distance $x_2 = A_0 A_2 = 0,70 \text{ m}$. Justifier le résultat.

b) Calculer la valeur $\|\vec{v}_0\|$ de la vitesse du chariot.

2) Le chariot quitte le rail en O avec la vitesse $\vec{v}_0$ et tombe en chute libre. Déterminer dans le repère ($0, \vec{i}, \vec{j}$) fixe, l'équation de la trajectoire de son centre d'inertie. Quelle est la nature de cette trajectoire ?

II) Le rail est maintenant incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (l'extrémité O étant vers le haut). On envoie le chariot à partir de A_0 (origine des espaces $x = 0$), à la date $t = 0 \text{ s}$ (origine des dates) vers l'extrémité O avec une vitesse initiale $\vec{v}_1$.

Différents chronomètres permettent de déterminer les dates de passage du chariot par différentes positions pendant sa montée. On dresse le tableau suivant:

$x \text{ (m.)}$	0,20	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$t \text{ (s)}$	0,39	0,84	1,11	1,41	1,79	2,33
$\frac{2x}{t} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	1,03	0,95	0,90	0,85	0,78	0,69

1) Tracer la courbe représentative de $\frac{2x}{t} = f(t)$

2) Faire l'étude théorique du mouvement du chariot sur le rail incliné et déterminer l'expression de son équation horaire.

3) Dédire des questions précédentes les valeurs de:

a) la vitesse initiale $\vec{v}_1$ du chariot,

- b) l'accélération $\vec{\gamma}$ du mouvement,
c) l'inclinaison α du rail sur le plan horizontal.

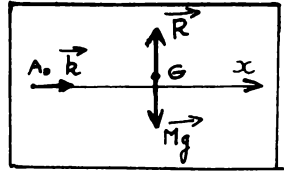
Corrigé

I) 1) a) Sur le rail, le chariot est soumis à deux forces: son poids $\vec{P} = M \vec{g}$

et la réaction $\vec{R}$ du rail.

La R.F.D appliquée au chariot s'écrit:

$$M \vec{g} + \vec{R} = M \vec{\gamma}_G = M \vec{\gamma}$$



Projetons cette relation dans le repère $(A_0, \vec{k})$, on trouve $\gamma = 0 \text{ m.s}^{-2}$. L'accélération du mouvement du centre d'inertie du chariot est nulle, le mouvement du chariot (à l'exception de ses roues) est rectiligne uniforme. L'équation horaire de ce mouvement est de la forme $x = at$ ($a = \text{constante}$).

On peut écrire $\frac{x}{t} = a = \text{constante} \Rightarrow \frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} \Rightarrow t_2 = t_1 \frac{x_2}{x_1}$

Le temps mis par le chariot pour parcourir la distance x_2 est:

$$t_2 = t_1 \frac{x_2}{x_1} = 0,36 \times \frac{0,70}{0,20} = 1,26 \text{ s}$$

b) Puisque le mouvement du chariot est rectiligne uniforme, la vitesse est constante $v_0 = \frac{x_1}{t_1} = 0,56 \text{ m.s}^{-1}$

La valeur de la vitesse est : $\|\vec{v}_0\| = 0,56 \text{ m.s}^{-1}$

2) A partir de 0, le chariot ne sera soumis qu'à son poids $\vec{P} = M \vec{g}$. La R.F.D appliquée au chariot s'écrit:

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{\gamma} \quad \text{avec} \quad \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{g}$$

L'accélération du centre d'inertie du chariot est donc

$$\vec{\gamma} = \vec{g} = \|\vec{g}\| \vec{j} \quad \vec{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ \|\vec{g}\| \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse s'écrit:

$$\vec{v} = \|\vec{g}\| \cdot t \cdot \vec{j} + \|\vec{v}_0\| \cdot \vec{i}$$

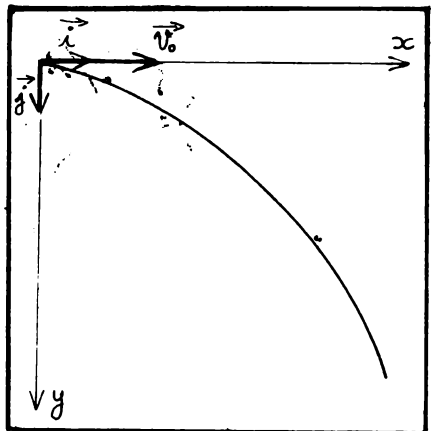
Le vecteur position s'écrit:

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| t^2 \cdot \vec{j} + \|\vec{v}_0\| t \cdot \vec{i}$$

Or $\vec{OG} = x \vec{i} + y \vec{j}$; alors dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les équations paramétriques du mouvement sont:

$$\begin{cases} x = \|\vec{v}_0\| \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| t^2 \end{cases}$$

L'élimination de t entre x et y nous donne l'équation de la trajectoire:
 $y = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| \left(\frac{x}{\|\vec{v}_0\|} \right)^2 = \frac{1}{2} \|\vec{g}\| \frac{x^2}{v_0^2} = 15,9 x^2$ (Branche de parabole de sommet 0)



II) 1) La courbe représentative

de la fonction $\frac{2x}{t} = f(t)$

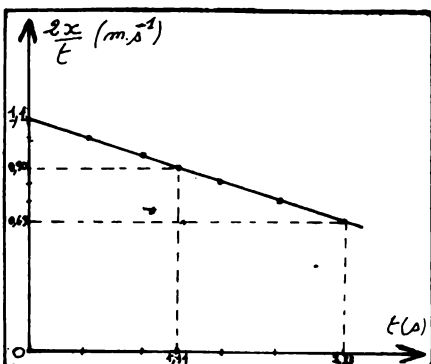
(tracée ci-contre) est une droite ne passant pas par l'origine des axes. Son équation est

de la forme $\frac{2x}{t} = at + b$.

On lit pour $t = 0$: $b = 1,1 \text{ m.s}^{-1}$

Le coefficient directeur est:

$$a = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = -0,18 \text{ m.s}^{-2}$$



2) Soit G le centre d'inertie du chariot. La R.F.D appliquée au chariot s'écrit:

$$M \vec{g} + \vec{R} = M \vec{\gamma}$$

Projetée dans le repère $(0, \vec{i})$ colinéaire à la trajectoire de G, la relation précédente donne:

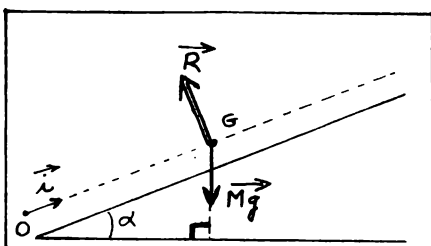
$$-M \|\vec{g}\| \sin \alpha = M \gamma$$

L'accélération du mouvement de G est: $\gamma = -\|\vec{g}\| \sin \alpha$

$\|\vec{g}\|$ et $\sin \alpha$ sont constants donc γ est constante: le mouvement du centre d'inertie du chariot est rectiligne uniformément varié.

L'expression de la vitesse est: $v = \gamma t + v_1$

L'équation horaire du mouvement est: $x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_1 t$



*** Remarque: Le mouvement du chariot sur le rail pourrait se composer de deux phases:

- * Pendant la montée, v est positive, donc de signe opposé à γ : les vecteurs vitesse et accélération sont de sens contraires, le mouvement est uniformément retardé. C'est cette phase décélérée qui a fait l'objet de notre étude.
- * Pendant la descente, v est négative donc de même signe que γ : les vecteurs vitesse et accélération sont de même sens. Le mouvement est uniformément accéléré, cette phase accélérée n'a pas été considérée dans le problème.

3) D'après l'étude expérimentale, $\frac{2x}{t} = at + b$ donc:
 $x = \frac{1}{2} a t^2 + \frac{b}{2} t$

D'après l'étude théorique, $x = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_1 t$

Par analogie entre les deux expressions de x , nous déduisons:

a) la valeur de la vitesse initiale du chariot:

$$v_1 = \frac{b}{2} = \frac{1,1}{2} = 0,55 \text{ m.s}^{-1}$$

b) la valeur de l'accélération:

$$\gamma = a = -0,18 \text{ m.s}^{-2}$$

c) L'inclinaison α du rail par rapport à l'horizontale est telle que:

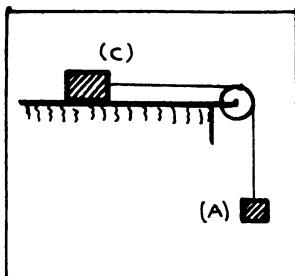
$$\|\vec{\gamma}\| = \|\vec{g}\| \cdot \sin \alpha \iff \sin \alpha = \frac{\|\vec{\gamma}\|}{\|\vec{g}\|}$$

Numériquement, $\sin \alpha = 0,018$; l'angle α est très petit, alors $\alpha = 0,018 \text{ rad} = 1^\circ 18'$

Exercice n° 2

Un chariot (C) de masse $M = 0,960 \text{ kg}$ peut se déplacer sur un plan horizontal. Il est relié à un corps (A) de masse $m = 0,020 \text{ kg}$ par un fil inextensible et de masse négligeable. Le fil passe sur la gorge d'une poulie de masse négligeable (voir figure ci-contre).

Les frottements du chariot sur le plan sont équivalents à une force $\vec{f}$ horizontale constante d'intensité $\|\vec{f}\| = K M \|\vec{g}\|$



1) Déterminer l'expression de la valeur de l'accélération du système (C) en fonction de M , m , $\|\vec{g}\|$ et K .

2) Une étude expérimentale montre que l'accélération du système (C) a pour valeur $\gamma = 0,18 \text{ m.s}^{-2}$. Calculer:

- la valeur du coefficient K ,
- la tension du fil,
- la vitesse du chariot après $1,21 \text{ m}$ de parcours, sachant que le système part sans vitesse initiale.

3) A la fin du parcours précédent, le fil reliant (C) et (A) casse. Déterminer la nature du mouvement ultérieur de (C) sur le plan. Calculer son accélération.

On donne $\|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et on précise que les frottements au niveau de l'axe de la poulie sont négligeables.

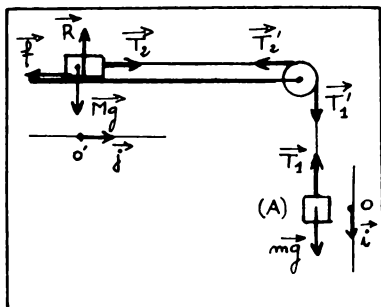
Corrigé

1) Le chariot (C) et le corps (A) constituent un ensemble déformable de deux systèmes indéformables. Appliquons la R.F.D à chacun de ces deux systèmes indéformables.

** Le corps (A) est soumis à son poids $m \vec{g}$ et à la tension $\vec{T}_1$ du fil

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T}_1 = m \cdot \vec{\gamma} \quad (1)$$

** Le chariot (C) est soumis à son



poids $M \vec{g}$, à la tension $\vec{T}_2$ du fil, à la réaction $\vec{R}$ du plan et à la force de frottement $\vec{f}$.

$$M \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R} + \vec{f} = M \vec{\gamma}_2 \quad (2)$$

En projetant (1) sur $(0, \vec{i})$ et (2) sur $(0', \vec{j})$, on trouve :

$$m \|\vec{g}\| - \|\vec{T}_1\| = m \gamma_1 \quad (3)$$

$$- \|\vec{f}\| + \|\vec{T}_2\| = M \gamma_2 \quad (4)$$

La poulie est de masse négligeable et il n'y a pas de frottement important sur son axe, donc: $\|\vec{T}_1'\| = \|\vec{T}_2'\|$

D'autre part, $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_1'\|$ et $\|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_2'\|$ (tensions respectives de deux portions rectilignes de fil); alors $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$.

Le fil étant inextensible et de masse négligeable, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

Faisons la somme des équations (3) et (4), nous trouvons:

$$m \|\vec{g}\| - \|\vec{f}\| = (M + m) \gamma$$

$$L'accélération \gamma s'écrit: \quad \gamma = \frac{m \|\vec{g}\| - \|\vec{f}\|}{m + M}$$

$$\text{or } \|\vec{f}\| = K \cdot M \cdot \|\vec{g}\| \quad \text{donc} \quad \gamma = \|\vec{g}\| \cdot \frac{m - K M}{m + M}$$

$$2) \text{ L'accélération a pour valeur } \gamma = 0,18 \text{ m.s}^{-2}$$

a) Valeur de K :

$$\gamma = \|\vec{g}\| \cdot \frac{m - K \cdot M}{m + M} \implies K = \frac{m}{M} - \frac{(m + M) \gamma}{M \|\vec{g}\|}$$

$$\text{A.N: } K = 2,08 \times 10^{-3}$$

b) Tension du fil:

$$\text{De l'équation (3) nous déduisons: } \|\vec{T}_1\| = m \cdot (\|\vec{g}\| - \gamma)$$

$$\text{A.N: } \|\vec{T}_1\| = 0,192 \text{ N.}$$

c) Distance parcourue:

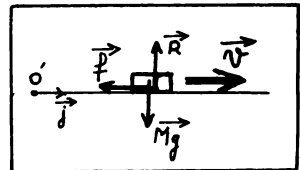
Puisque le mouvement de (C) est rectiligne uniformément varié,

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \gamma \cdot (x - x_0); \quad \text{or } v_0 = 0 \text{ et } x - x_0 = d = 1,21 \text{ m}$$

$$\text{donc } v = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot d} = 0,66 \text{ m.s}^{-1}$$

3) Considérons le chariot (C) après la rupture du fil.

Dans le repère $(0', \vec{j})$, le chariot est soumis à son poids $M \vec{g}$, à la réaction $\vec{R}$ et à la force de frottement $\vec{f}$.



$$\text{La R.F.D appliquée à (C) s'écrit: } M \vec{g} + \vec{R} + \vec{f} = M \vec{\gamma}_0$$

$$\text{Par projection sur } (0', \vec{j}): \quad - \|\vec{f}\| = M \gamma_0$$

La nouvelle accélération de (C) sera :

$$\gamma_0 = - \frac{\|\vec{f}\|}{M} = - \frac{K M \|\vec{g}\|}{M} = - K \|\vec{g}\| \quad \text{A.N: } \gamma_0 = - 2 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

Puisque $\gamma_0 < 0$ et $v > 0$, le produit $v \gamma_0 < 0$ et alors le

mouvement est rectiligne uniformément retardé.

*** Remarques:

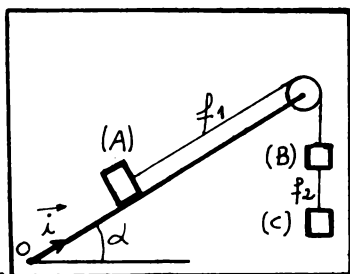
-* A la fin de cette phase de mouvement retardé, le chariot s'arrête; comme la force de frottement est de sens contraire à la vitesse, alors cette force de frottement s'annule aussi. A partir de cet instant, la somme des forces extérieures agissant sur (C) est nulle, l'accélération de (C) s'annule et le chariot s'immobilise (vitesse et accélération nulles). La force de frottement est passive, elle ne produit pas de mouvement.

-* L'accélération du mouvement peut être déduite de l'expression

$$\gamma_0 = \left\| \vec{g} \right\| \frac{m - K M}{m + M} \quad \text{en annulant } m.$$

Exercice n° 3

Un solide (A) supposé ponctuel de masse $m_A = 1 \text{ kg}$ peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Ce solide est attaché à un fil f_1 qui passe sur la gorge d'une poulie de masse négligeable fixée au sommet du plan incliné.



A l'autre extrémité du fil f_1 est accroché un solide (B) de masse $m_B = 0,5 \text{ kg}$ auquel est lié, par un fil f_2 , un solide (C) de masse $m_C = m_B$. Les fils f_1 et f_2 sont inextensibles et de masse négligeable. L'angle α vaut 30° .

1) Le solide (A) part de O, extrémité inférieure du plan incliné, à la date $t = 0 \text{ s}$, sans vitesse initiale. Déterminer:

- la nature du mouvement du système,
- les tensions des fils f_1 et f_2 .

2) A la date $t_1 = 1 \text{ s}$, le fil f_2 casse.

- Etudier le mouvement ultérieur du système (A, B).
- Ecrire l'équation horaire du mouvement de (A).
- Calculer la valeur de la tension du fil f_1 .

3) A partir de la date $t_2 = 1,5 \text{ s}$, le corps (A) entre dans une partie du plan qui présente une force de frottement $\vec{f}$ de valeur constante et parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

a) Donner l'expression de la nouvelle accélération du système. Calculer sa valeur sachant que $\|\vec{f}\| = 3 \text{ N}$.

b) Etudier le mouvement du corps (A) pour $t > 1,5 \text{ s}$. Ecrire l'équation horaire correspondante.

c) Où se trouve le corps (A) à la date $t_3 = 3 \text{ s}$?

On donne $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Corrigé

1) Soient les systèmes formés par les corps (A), (B) et (C) constituant le dispositif schématisé dans la figure.

a) Nature du mouvement

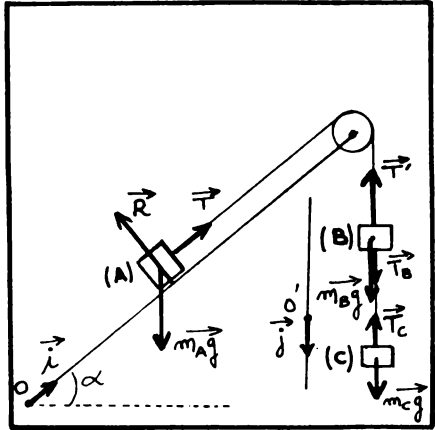
* (A) est soumis à son poids $m_A \vec{g}$ à la tension $\vec{T}$ du fil f_1 et à la réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

La R.F.D appliquée à (A) s'écrit

$$m_A \cdot \vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = m_A \cdot \vec{\gamma}_A$$

Projetons sur (O, $\vec{i}$):

$$-m_A \|\vec{g}\| \sin \alpha + \|\vec{T}\| = m_A \cdot \gamma_A \quad (1)$$



* (B) est soumis à son poids $m_B \vec{g}$, à la tension $\vec{T}'$ du fil f_1 et à la tension $\vec{T}_B$ du fil f_2 . La R.F.D s'écrit pour (B):

$$m_B \cdot \vec{g} + \vec{T}' + \vec{T}_B = m_B \cdot \vec{\gamma}_B$$

Projetons sur (O', $\vec{j}$): $m_B \|\vec{g}\| + \|\vec{T}_B\| - \|\vec{T}'\| = m_B \cdot \gamma_B \quad (2)$

* (C) est soumis à son poids $m_C \vec{g}$ et à la tension $\vec{T}_C$ du fil f_2

La R.F.D appliquée à (C) s'écrit: $m_C \vec{g} + \vec{T}_C = m_C \cdot \vec{\gamma}_C$

Projetons sur (O', $\vec{j}$): $m_C \|\vec{g}\| - \|\vec{T}_C\| = m_C \cdot \gamma_C \quad (3)$

La poulie est de masse négligeable: $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$

$\|\vec{T}_B\| = \|\vec{T}_C\|$ (tensions d'une même portion rectiligne du fil f_2)

Les fils sont inextensibles donc $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_C = \gamma$

En faisant la somme de (1), (2) et (3), nous obtenons:

$$(m_B + m_C - m_A \cdot \sin \alpha) \|\vec{g}\| = (m_A + m_B + m_C) \gamma$$

La valeur algébrique commune des accélérations des 3 systèmes:

$$\gamma = \frac{m_B + m_C - m_A \cdot \sin \alpha}{m_A + m_B + m_C} \|\vec{g}\| = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$$

L'expression de la vitesse est $v = \gamma \cdot t = 2,5 t > 0 \quad \forall t > 0 \text{ s}$;
Le produit $v \cdot \gamma > 0$, le mouvement de chacun des trois solides est rectiligne uniformément accéléré.

b) Tensions des fils

De (1) on tire: $\|\vec{T}\| = m_A (\gamma + \|\vec{g}\| \cdot \sin \alpha) \Rightarrow \|\vec{T}\| = 7,5 \text{ N}$

De (3) on tire: $\|\vec{T}_B\| = m_C (\|\vec{g}\| - \gamma) \Rightarrow \|\vec{T}_B\| = 3,75 \text{ N}$

2) Après la rupture du fil f_2 qui a lieu à $t_1 = 1 \text{ s}$, le dispositif sera formé par (A) et (B).

a) La nouvelle accélération γ_1 sera déduite de γ en éliminant m_C ; on obtient:

$$\gamma_1 = \frac{m_B - m_A \sin \alpha}{m_A + m_B} \cdot \|\vec{g}\| \quad \text{A.N: } \gamma_1 = 0 \text{ m.s}^{-2}$$

b) $\gamma_1 = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniforme.
La valeur de la vitesse à la date t_1 est: $v = \gamma \cdot t_1 = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$.

Expression de la vitesse: $v = \text{constante} = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$

L'abscisse du mobile (A) à t_1 est $x = \frac{1}{2} \gamma \cdot t_1^2 = 1,25 \text{ m}$.

Equation horaire: $x = 2,5 t + k$; or à $t = 1 \text{ s}$, $x = 1,25 \text{ m}$
donc $k = -1,25 \text{ m} \Rightarrow x = 2,5 t - 1,25$

avec $t \geq 1 \text{ s}$.

c) Tension du fil:

La R.F.D appliquée à (A) donne, après projection sur $(0, \vec{i})$:

$$-m_A \|\vec{g}\| \sin \alpha + \|\vec{T}\| = 0 \Rightarrow \|\vec{T}\| = m_A \|\vec{g}\| \sin \alpha \Rightarrow \|\vec{T}\| = 5 \text{ N}$$

3) A partir de la date $t = 1,5 \text{ s}$, le corps (A) devient soumis, "en plus des forces qui lui ont donné un mouvement rectiligne uniforme", à une force de frottement de sens contraire à la vitesse, donc de sens contraire à la tension $\vec{T}$ du fil.

a) Accélération de A et B:

La R.F.D appliquée successivement aux corps (A) et (B) donne:

$$m_A \vec{g} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m_A \vec{\gamma}_A$$

$$m_B \vec{g} + \vec{T}' = m_B \vec{\gamma}_B$$

Les fils sont inextensibles et de masse négligeable, donc les accélérations de (A) et de (B) ont la même valeur algébrique, les solides parcourant des distances égales pendant la même durée.

$$\gamma_{2A} = \gamma_{2B} = \gamma_2$$

Projetons les relations vectorielles obtenues pour (A) et (B) respectivement sur $(0, \vec{i})$ et $(0', \vec{j})$, nous obtenons:

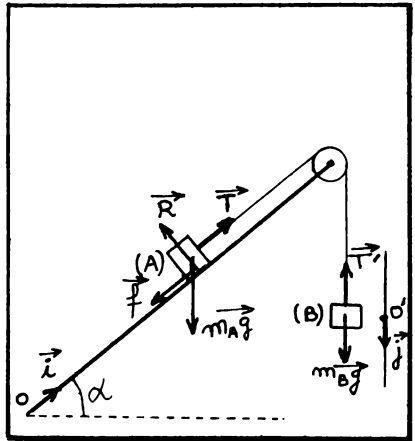
$$-m_A \|\vec{g}\| \sin \alpha - \|\vec{f}\| + \|\vec{T}\| = m_A \gamma_2$$

$$m_B \|\vec{g}\| - \|\vec{T}'\| = m_B \gamma_2$$

De plus: $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$

Faisons la somme des 3 relations algébriques précédentes, nous en déduisons :

$$\gamma_2 = \frac{(m_B - m_A \sin \alpha) \|\vec{g}\| - \|\vec{f}\|}{m_A + m_B} \quad \text{or } m_B - m_A \sin \alpha = 0$$



donc l'accélération est : $\gamma_2 = \frac{-\|\vec{f}\|}{m_A + m_B} = -2 \text{ m.s}^{-2}$

La vitesse de (A) s'écrit : $v = -2t + k'$; on sait qu'à $t = 1,5 \text{ s}$, $v = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$; donc $k' = 5,5$ et $v = -2t + 5,5$

Cette vitesse de (A) s'annule à t_3 tel que : $-2t_3 + 5,5 = 0$ cela correspond à $t_3 = 2,75 \text{ s}$.

Pour $1,25 \text{ s} \leq t < 2,75 \text{ s}$, v est positive et γ_2 est négative, le mouvement est rectiligne uniformément retardé.

Pour $t \geq 2,75 \text{ s}$, $v = 0$: le système sera au repos.

L'équation horaire du mouvement pour $1,25 \text{ s} \leq t < 2,75 \text{ s}$ est:

$x = -t^2 + 5,5t + k''$; à $t = 1,5 \text{ s}$, $x = 2,5 \text{ m}$ d'où on déduit: $k'' = -3,5 \text{ m}$;

$$\begin{cases} x = -t^2 + 5,5t - 3,5 \\ 1,50 \text{ s} \leq t < 2,75 \text{ s} \end{cases}$$

c) A $t_4 = 3 \text{ s} > t_3$, (A) se trouve à la même position qu'il occupait à la date $t_3 = 2,75 \text{ s}$.

$$x_A (\text{à } t_4 = 3 \text{ s}) = x_A (\text{à } t_3 = 2,75 \text{ s}) = 4,063 \text{ m.}$$

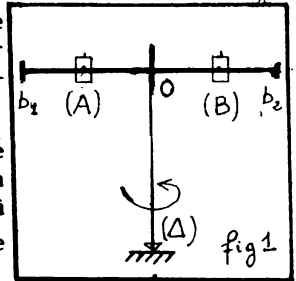
Commentaire: Cet exercice nous montre le rôle passif d'une force de frottement. En effet, $\vec{f}$ a existé tant que le solide (A) est en mouvement et elle a ralenti le mouvement de ce solide jusqu'à l'arrêt. Lorsque (A) s'arrête, la force $\vec{f}$ disparaît et on n'obtient pas une nouvelle phase de mouvement où (A) descendrait. Une force de frottement n'est pas productive, c'est une résistance purement passive.

7- R.F.D DE ROTATION - MOMENT CINETIQUE

Exercice n° 1

Une tige rigide de masse négligeable, et de longueur $L = 0,50$ m peut tourner autour d'un axe (Δ) vertical passant par son milieu 0.

1) Deux solides ponctuels A et B de même masse $M = 0,2$ kg, sont fixés sur la tige horizontale de part et d'autre de 0 à $d_1 = d_2 = L/4$ (fig 1). Le système tourne à raison de 150 tours par minute.



a) Montrer que, si aucune action extérieure n'intervient, le système devra conserver indéfiniment sa vitesse angulaire.

b) Cependant, on constate que le système perd, en réalité, et progressivement, de sa vitesse et finit par s'arrêter au bout de 157 secondes. En admettant que ce ralentissement est dû à l'action de résistances passives équivalentes à un couple de moment constant, calculer:

α) l'accélération angulaire α'' du mouvement,

β) le moment M_C du couple résistant,

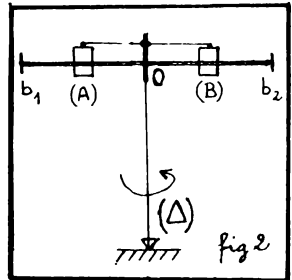
γ) le nombre de tours effectués entre le début du ralentissement et l'arrêt du système.

2) On suppose maintenant que les solides A et B sont maintenus sur la tige par deux fils inextensibles, de masse négligeable et de même longueur $L/4$ (fig 2).

a) Le système tourne à raison de 150 tours par minute. Calculer son moment cinétique.

b) A un instant donné, pendant la rotation à raison de 150 tours par minute, il y a rupture simultanée des deux fils. Les deux solides A et B viennent se fixer respectivement aux deux extrémités de la tige horizontale, grâce à deux butées b_1 et b_2 de masses négligeables disposées à ces deux extrémités.

Calculer la nouvelle vitesse angulaire du système.



Corrigé

1) La R.F.D de rotation appliquée au système s'écrit:

$$M = \frac{dC}{dt}, \quad M \text{ étant le moment résultant des forces extérieures.}$$

a) Si aucune action extérieure n'intervient, alors $M = 0$
 $\frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow C$ est constant, or $C = J_{\Delta} \cdot \alpha'$; comme J est constant, alors α' est constante : le mouvement sera de rotation uniforme

b) La vitesse angulaire initiale est:

$$\alpha'_1 = 150 \text{ tours.mn}^{-1} = \frac{150 \times 2\pi}{60} = 5\pi = 15,7 \text{ rad.s}^{-1}$$

La R.F.D s'écrit: $\Sigma \vec{M} = \vec{M}_{\vec{P}_1} + \vec{M}_{\vec{P}_2} + \vec{M}_{\vec{R}_1} + \vec{M}_{\vec{R}_2} + \vec{M}_C = \frac{d\sigma}{dt} = J_1 \alpha''$
 $\vec{M}_C$ = moment du couple résistant.

Tous les moments sont calculés par rapport à l'axe (Δ).

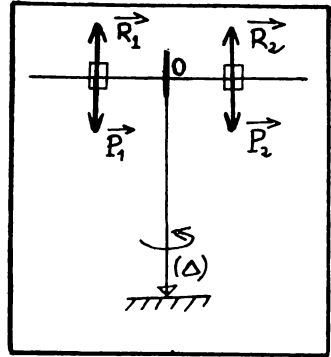
$\vec{M}_{\vec{P}_1} = \vec{M}_{\vec{P}_2} = \vec{M}_{\vec{R}_1} = \vec{M}_{\vec{R}_2} = 0$ (forces parallèles à l'axe Δ) donc:

$$\vec{M}_C = J_1 \alpha'' ;$$

l'accélération angulaire est:

$$\alpha'' = \frac{\vec{M}_C}{J_1} = \text{constante}$$

Le mouvement du système est de rotation uniformément varié.



α) La vitesse angulaire s'écrit: $\alpha' = \alpha'' \cdot t + \alpha'_1$
 A la date $t = 157 \text{ s}$, $\alpha' = 0 \Rightarrow$ L'accélération angulaire est :

$$\alpha'' = - \frac{\alpha'_1}{t} = - \frac{15,7}{157} = - 0,1 \text{ rad.s}^{-2}$$

β) Le moment du couple résistant est: $\vec{M}_C = J_1 \alpha''$

Le moment d'inertie J_1 du système par rapport à (Δ) est égal à

$$J_1 = M \cdot d_1^2 + M \cdot d_2^2 = 2 M \cdot \frac{L^2}{16} = M \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$\vec{M}_C = \frac{M \cdot L^2}{8} \alpha'' = - 6,25 \times 10^{-4} \text{ m.N}$$

Ce moment est négatif car il est résistant et le mouvement se fait dans le sens positif.

γ) La relation indépendante du temps entre les abscisses angulaires et les vitesses angulaires s'écrit:

$$\alpha'^2 - \alpha'^2_1 = 2 \alpha'' (\alpha - \alpha_0)$$

$$\alpha - \alpha_0 = 2 \pi n \text{ (n = nombre de tours effectués)}; \alpha'_1 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$n = - \frac{\alpha'^2_1}{2 \alpha'' \cdot 2\pi} = - \frac{\alpha'^2_1}{4 \pi \alpha''} = 196,25 \text{ tours.}$$

2) a) Moment cinétique initial:

$$\sigma_1 = J_1 \alpha'_1 = \frac{M L^2}{8} \times 15,7 = 98,1 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \cdot \text{rad.s}^{-1}$$

Lorsque A et B se fixent aux deux extrémités de la tige, le moment d'inertie du système tournant devient:

$$J_2 = 2 M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = M \frac{L^2}{2} = 4 J_1$$

Le moment cinétique final est $\sigma_2 = J_2 \cdot \alpha'_2$

Le système est isolé, son moment cinétique se conserve $\sigma_1 = \sigma_2$
 (σ_1 = moment cinétique exactement juste après la rupture des fils).

$$J_1 \cdot \alpha'_1 = J_2 \cdot \alpha'_2$$

La nouvelle vitesse angulaire du système est:

$$\alpha'_2 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{4} = 37,5 \text{ tours.mn}^{-1} = 3,93 \text{ rad.s}^{-1}$$

Exercice n°2

On considère une roue arrière de bicyclette (S) formée par une jante de rayon R et une roue dentée de rayon r, de même axe, situées dans deux plans parallèles. On suppose que (S) est équivalente à un disque plein de masse M et de rayon R. Le moment d'inertie d'un disque plein par rapport à son axe de révolution est $J = \frac{1}{2} M R^2$

La roue est située dans un plan vertical et peut tourner sans frottement autour d'un axe (Δ) horizontal confondu avec son axe de révolution.

On donne: $M = 2 \text{ kg}$; $R = 0,3 \text{ m}$; $r = 0,05 \text{ m}$.

1) On exerce par l'intermédiaire d'une chaîne une force $\vec{F}$ d'intensité constante $\|\vec{F}\| = 9 \text{ N}$ et tangente à la roue dentée.

a) Quelle est la nature du mouvement de la roue ? Calculer son accélération angulaire.

b) Calculer, à l'instant où la roue termine son dixième tour compté à partir du repos ,

* le moment cinétique de la roue (S),

* la valeur de la vitesse $\vec{v}$ d'un point de la périphérie de la jante.

2) Au moment où la roue termine son dixième tour, on supprime $\vec{F}$. Quel est le mouvement ultérieur de (S) ?

3) Ensuite la roue est freinée par des patins appuyant sur la jante exerçant ainsi une force $\vec{f}$ tangente à la roue et de valeur constante. La roue s'arrête après 6,25 tours.

a) Quelle est la nature du mouvement de (S) ?

b) Calculer l'intensité de cette force de freinage et la durée de ce freinage.

Corrigé

1)a) Soit le système formé par la roue. La R.F.D de rotation appliquée à ce système s'écrit:

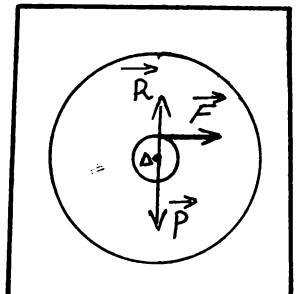
$$\sum M_{\vec{f}_{\text{ext}}} = J \cdot \alpha''$$

α'' = accélération angulaire de la roue,
 $J = \frac{1}{2} M R^2$ = son moment d'inertie par

rapport à l'axe de rotation (Δ)

$$\sum M_{\vec{f}_{\text{ext}}} = M_{\vec{P}} + M_{\vec{R}} + M_{\vec{F}}$$

Les moments du poids et de la réaction de l'axe sont nuls car ces forces coupent (Δ)



$$d'où : \sum \vec{M}_{\vec{f}_{ext}} = \vec{M}_{\vec{F}} = \|\vec{F}\| \cdot r \Rightarrow \alpha'' = \frac{\|\vec{F}\| \cdot r}{J} = \text{constante}$$

Le mouvement de rotation est uniformément varié (accélééré puisque la vitesse angulaire initiale est nulle).

$$\text{L'accélération angulaire s'écrit: } \alpha'' = \frac{2 \|\vec{F}\| \cdot r}{M \cdot R^2} \Rightarrow \alpha'' = 5 \text{ rad.s}^{-2}$$

b) La roue termine son 10^{ème} tour :

$$\text{L'élongation angulaire est: } \alpha = 2\pi n = 20\pi \text{ rad}$$

La relation indépendante du temps s'écrit:

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 = 2 \alpha'' (\alpha - \alpha_0) \text{ or } \alpha_0 = 0 \text{ et } \alpha_0' = 0 \text{ donc:}$$

$$\alpha' = \sqrt{2 \alpha \alpha''} = \sqrt{200\pi} = 25 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$* \text{ Le moment cinétique de la roue: } \sigma = J \alpha' = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \alpha'$$

$$\text{A.N: } \sigma = 2,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad.s}^{-1}$$

* La vitesse d'un point de la périphérie de la jante:

$$v = R \alpha' = 0,3 \times 25 \quad v = 7,5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$2) \text{ On supprime } \vec{F}: \sum \vec{M}_{\vec{f}_{ext}} = 0 \Rightarrow J \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \alpha'' = 0 \text{ rad.s}^{-2}$$

L'accélération angulaire est nulle, la vitesse angulaire est constante et égale à 25 rad.s^{-1} . Le mouvement est de rotation uniforme.

3)a) Soit θ'' la nouvelle accélération angulaire de la roue.

$$\text{La R.F.D de rotation s'écrit: } J \theta'' = \vec{M}_{\vec{f}} = - \|\vec{f}\| \cdot R$$

$$\theta'' = - \frac{\|\vec{f}\| \cdot R}{J} = - \frac{2 \|\vec{f}\|}{M \cdot R} = \text{constante} < 0 \quad (1)$$

L'accélération angulaire est négative, la vitesse angulaire est positive puisque la roue tourne dans le sens positif, le mouvement de rotation est uniformément retardé.

b) La relation indépendante du temps s'écrit:

$$\theta'^2 - \theta_0'^2 = 2 \theta'' (\theta - \theta_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = 0 \text{ (arrêt)} \\ \theta_0' = \alpha' = 25 \text{ rad.s}^{-1} \\ \theta - \theta_0 = 2\pi \times 6,25 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta'' = - \frac{\theta_0'^2}{2 (\theta - \theta_0)} = - 2,5\pi \text{ rad.s}^{-2}$$

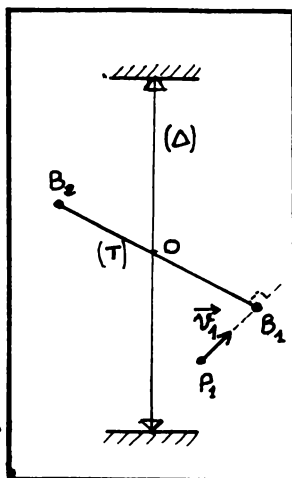
$$\text{La relation (1) donne: } \|\vec{f}\| = - \frac{M R \theta''}{2} = 2,36 \text{ N}$$

La durée du freinage:

$$\theta' = \theta'' \tau + \theta_0' \Rightarrow \tau = \frac{\theta' - \theta_0'}{\theta''} = 3,14 \text{ s}$$

Exercice n° 3

Deux billes B_1 et B_2 supposées ponctuelles de même masse $m = 0,1 \text{ kg}$, sont fixées aux deux extrémités d'une tige "T" horizontale de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$ et de masse négligeable. Cet ensemble peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical fixe (Δ) passant perpendiculairement par le milieu O de la tige "T".



1) L'ensemble étant au repos, un projectile (P_1) de masse $M = 10 \text{ g}$ est lancé en direction de B_1 avec une vitesse horizontale $\vec{v}_1$ normale à la tige. Au moment du choc, le projectile (P_1) se fixe sur B_1 .

On donne $\|\vec{v}_1\| = 10,5 \text{ m.s}^{-1}$

a) Calculer le moment cinétique du système $\{B_1, B_2, T, P_1\}$ juste avant le choc.

b) En supposant que le moment cinétique se conserve avant et après le choc, calculer la vitesse angulaire α'_1 du système $\{B_1, B_2, T, P_1\}$ juste après le choc.

2) Le système formé $\{B_1, B_2, T, P_1\}$ étant animé du mouvement de rotation de vitesse angulaire α'_1 , un deuxième projectile (P_2) identique à (P_1) est lancé en direction de B_2 avec une vitesse $\vec{v}_2$ horizontale, normale à la tige. Au moment du choc, (P_2) se fixe sur B_2 et y reste collé après le choc. ($\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\|$) Déterminer la nouvelle vitesse angulaire α'_2 du dispositif juste après le choc, dans les deux cas suivants:

a) 1^{er} cas : la vitesse $\vec{v}_2$ a même sens que la vitesse de B_2 .

b) 2^{ème} cas : la vitesse $\vec{v}_2$ a le sens contraire de celle de B_2 .

Corrigé

Soit $L = \ell/2 = 0,25 \text{ m}$ la distance OB_1 .

Rappelons que le moment cinétique d'un solide ponctuel est égal au moment, par rapport à l'axe de rotation, de sa quantité de mouvement.

Le moment cinétique d'un système est égal à la somme algébrique des moments cinétiques de toutes les parties formant ce système

1)a) Le moment cinétique avant le choc:

$$\sigma_1 = \sigma_1(P_1) + \sigma_1(T, B_1, B_2)$$

$$\sigma_1(T, B_1, B_2) = J_O \alpha'_0 = 0$$

$$\sigma_1(P_1) = M \cdot v_1 \cdot L = 10^{-2} \times 10,5 \times 0,25 = 2,625 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2.\text{rad.s}^{-1}$$

$$\text{donc } \sigma_1 = 2,625 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2.\text{rad.s}^{-1}$$

b) le moment cinétique après le choc:

$\sigma_2 = J_1 \alpha'_1$ avec $J_1 = M L^2 + m L^2 + m L^2 = (2m + M) L^2$ et α'_1 = la vitesse angulaire après le choc.

Puisque $\sigma_1 = \sigma_2$, alors $M v_1 L = (2m + M) L^2 \alpha'_1$ d'où:

$$\alpha'_1 = \frac{M v_1}{L (2m + M)} = 2 \text{ rad. s}^{-1}$$

2) Le moment d'inertie du système final formé par T, B₂, B₂, P₁ et P₂ est:

$$J_2 = (2m + 2M) L^2 = 2(m + M) L^2$$

Le moment cinétique avant le choc est:

$$\sigma_1 = \sigma(P_2) + \sigma(T, B_1, B_2, P_1) = \sigma(P_2) + M v_1 L$$

Le moment cinétique après le choc est:

$$\sigma_2 = J_2 \alpha'_2$$

a) 1^{er} cas: la vitesse $\vec{v}_2$ a même sens que la vitesse de B₂.

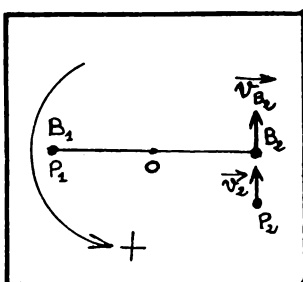
$$\sigma(P_2) = M v_2 L = M v_1 L \text{ d'où } \sigma_1 = 2 M v_1 L$$

Puisque le moment cinétique se conserve:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow 2 M v_1 L = J_2 \alpha'_2$$

La vitesse angulaire après le choc est :

$$\alpha'_2 = \frac{2 M v_1 L}{2(m + M)L} = \frac{M v_1}{(m + M)L} = 3,82 \text{ rad.s}^{-1}$$



b) 2^{ème} cas: la vitesse $\vec{v}_2$ a le sens contraire de celle de B₂.

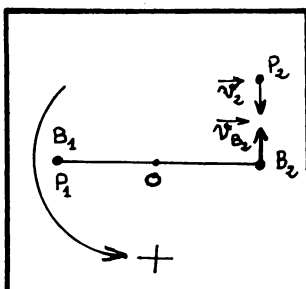
$$\sigma_1 = \sigma(P_2) + M v_1 L$$

$$\sigma(P_2) = M v_2 L = - M v_1 L \text{ d'où } \sigma_1 = 0$$

Or $\sigma_1 = \sigma_2$ donc $\sigma_2 = 0 \Rightarrow J_2 \alpha'_2 = 0$ et $\alpha'_2 = 0$

$$\alpha'_2 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

Le système s'arrête juste après le choc et il reste au repos par la suite.

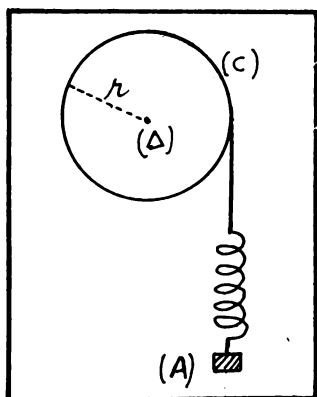


Exercice n° 4

Le dispositif représenté par la figure ci-contre comprend:

- un solide (A) de masse $m = 50 \text{ g}$,
- un cylindre (C) homogène, de rayon $r = 10 \text{ cm}$, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal fixe (Δ) passant par son centre; sur ce cylindre est enroulé un fil inextensible et de masse négligeable.

- un ressort à spires non jointives de raideur $K = 10 \text{ N.m}^{-1}$, de masse négligeable et de longueur à vide $L_0 = 10 \text{ cm}$. Le dispositif est lâché sans vitesse



initiale. Au cours du mouvement, le ressort garde une longueur constante $L = 14 \text{ cm}$.

- 1) Calculer l'accélération γ du mouvement du solide (A).
- 2) Déterminer la valeur du moment d'inertie J du cylindre.
- 3) Quelle est la nature du mouvement du cylindre ? Etablir l'équation horaire $\alpha = f(t)$ de son mouvement en prenant pour $t = 0 \text{ s}$ l'instant du début du mouvement.
- 4) Calculer le moment cinétique du cylindre à l'instant de date $t = 2 \text{ s}$. $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Corrigé

1) Mouvement du solide (A) :

(A) est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du ressort. La R.F.D s'écrit:
 $m\vec{g} + \vec{T} = m.\vec{\gamma}$

Projetons sur le repère $(0, \vec{i})$:

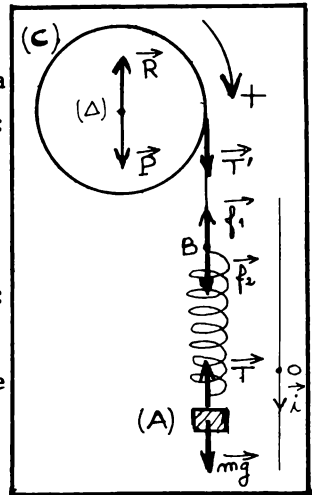
$$m\|\vec{g}\| - \|\vec{T}\| = m\gamma$$

avec $\|\vec{T}\| = K(L - L_0)$ d'où :

$$m\|\vec{g}\| - K(L - L_0) = m\gamma$$

L'accélération du mouvement du solide (A) est donc:

$$\gamma = \|\vec{g}\| - \frac{K}{m}(L - L_0) = 2 \text{ m.s}^{-2}$$



2) Soit le système formé par le cylindre (C). A part son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ de l'axe, ce système n'est soumis qu'à l'action d'une seule force extérieure $\vec{T}'$ (tension du fil).

La R.F.D s'écrit: $M_{P/\Delta} + M_{R/\Delta} + M_{T'/\Delta} = J.\alpha''$

Les droites d'action de $\vec{P}$ et de $\vec{R}$ coupent l'axe, donc les moments de ces forces par rapport à (Δ) sont nuls.

$$M_{T'/\Delta} = \|\vec{T}'\|.r \iff \|\vec{T}'\|.r = J.\alpha''$$

En B, la R.F.D s'écrit: $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$ car la masse de B est nulle, d'où: $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\|$

$$\text{Or } \left. \begin{array}{l} \|\vec{f}_2\| = \|\vec{T}\| \text{ (tensions d'un ressort)} \\ \|\vec{f}_1\| = \|\vec{T}'\| \text{ (tensions d'une portion rectiligne d'un fil)} \end{array} \right\} \Rightarrow \|\vec{T}'\| = \|\vec{T}\|$$

Puisque $\|\vec{T}\| = K.(L - L_0)$ et $\gamma = r.\alpha''$, alors le moment d'inertie du cylindre est:

$$J = \frac{\|\vec{T}'\|.r}{\alpha''} = \frac{K.(L - L_0).r}{\frac{\gamma}{r}} \quad J = \frac{Kr^2(L - L_0)}{\gamma} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

3) Nature du mouvement du cylindre :

L'accélération angulaire du mouvement du cylindre est:

$$\alpha'' = \frac{\gamma}{r} \text{ avec } \gamma = 2 \text{ m.s}^{-2} \text{ et } r = 0,1 \text{ m} \implies \alpha'' = 20 \text{ rad.s}^{-2}$$

La vitesse angulaire s'écrit: $\alpha' = 20 t + \alpha'_0$; puisque à $t = 0 \text{ s}$ on a $\alpha'_0 = 0$, alors $\alpha' = 20 t$. On voit que pour toute date positive, la vitesse angulaire est positive donc de même signe que l'accélération angulaire: le mouvement du cylindre est de rotation uniformément accéléré.

L'élongation angulaire est une primitive de la vitesse angulaire, donc l'équation horaire du mouvement de (C) est $\alpha = 10 t^2 + \alpha_0$

$$\text{A } t = 0 \text{ s, } \alpha_0 = 0 \text{ rad donc } \alpha = 10 t^2$$

4) Moment cinétique du cylindre:

A chaque instant, le moment cinétique est donné par la relation

$$\sigma = J \cdot \alpha' \text{ avec } \alpha' = \alpha'' \cdot t \implies \sigma = J \cdot \alpha'' \cdot t$$

A $t = 2 \text{ s}$, le moment cinétique du cylindre (C) a pour valeur:

$$\sigma = 2 \times 10^{-3} \times 20 \times 2 = 8 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2.\text{rad.s}^{-1}$$

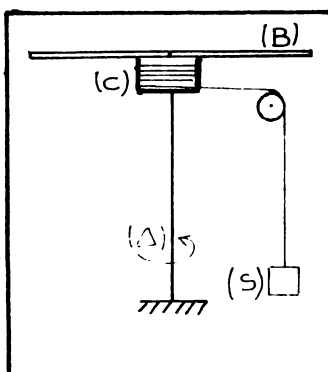
Exercice n° 5

On donne $\|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Soit le système représenté par la figure ci-contre:

- (B) est une barre solidaire du cylindre (C) de rayon $r = 2 \text{ cm}$,

- (S) est un solide de masse $m = 200 \text{ g}$ accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, enroulé sur le cylindre et passant sur la gorge d'une poulie de masse négligeable. Cette poulie est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal. L'ensemble (C, B) est mobile sans frottement autour de l'axe vertical de révolution du cylindre. Soit J_0 le moment d'inertie du système (B, C) par rapport à cet axe vertical (Δ).



On abandonne le dispositif à lui-même sans vitesse initiale et on mesure les temps mis par le solide (S) pour parcourir différentes distances x mesurées à partir du début du mouvement. On dresse le tableau suivant:

$x \text{ (m)}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$t \text{ (s)}$	0	2,24	3,13	3,87	4,45	4,97
$t^2 \text{ (s}^2\text{)}$	0	5	9,8	15	19,8	24,7

1) Tracer la courbe représentative de $x = f(t^2)$. En déduire la nature du mouvement du système et la valeur de l'accélération γ_0 du solide (S).

2) a) En appliquant la R.F.D, établir l'expression de γ_0 en fonction de J_0 , m , r et $\|\vec{g}\|$. b) Calculer J_0 .

Corrigé

1) Le graphe de $x = f(t^2)$ est une droite passant par l'origine, son équation est $x = a \cdot t^2$, x est une fonction du second degré en t donc le mouvement de (S) est rectiligne uniformément varié.

La vitesse a pour expression:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 a t$$

L'accélération du mouvement est :

$$\gamma_0 = \frac{dv}{dt} = 2 a \quad (a \text{ est le coefficient directeur de la droite tracée})$$

On trouve d'après le graphe:

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2^2 - t_1^2} = 4 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{On déduit : } \gamma_0 = 8 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

2) a) Appliquons la R.F.D à chacun des systèmes indéformables qui entrent dans la constitution du dispositif considéré.

* Le solide (S) est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}_0$$

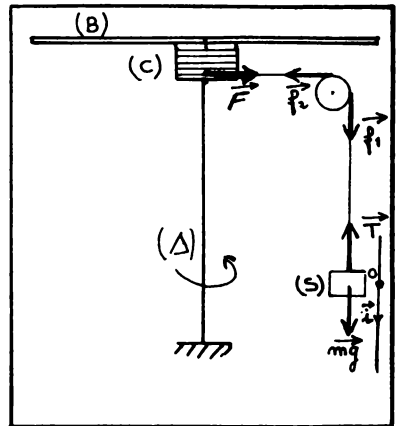
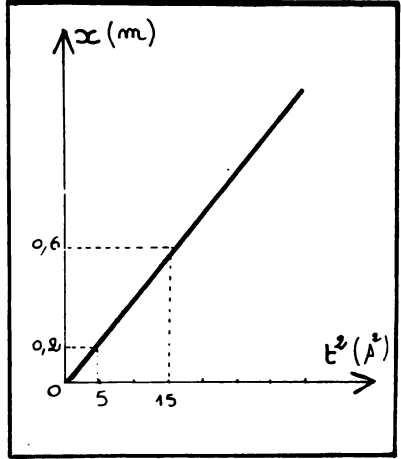
Projetons sur $(0, \vec{i})$:

$$m \|\vec{g}\| - \|\vec{T}\| = m \gamma_0 \quad (1)$$

* Le système tournant (C,B) est soumis à son poids total et à la réaction de l'axe de rotation, ces deux forces ont des moments nuls car leur droite d'action coupe cet axe. En plus de ces deux forces, le système (C,B) est soumis à la tension $\vec{F}$ du fil, tangente au cylindre.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M &= M_{\vec{F}} = J_0 \alpha'' \\ M_{\vec{F}} &= \|\vec{F}\| \cdot r \\ \alpha'' &= \frac{\gamma_0}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\vec{F}\| = \frac{J_0 \alpha''}{r} = \frac{J_0 \cdot \gamma_0}{r^2} \quad (2)$$

La masse de la poulie et le frottement au niveau de son axe sont négligeables; cette poulie est soumise à son poids et à la réaction de son axe qui ont des moments nuls; elle est soumise en plus aux tensions $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ du fil, la somme de leurs moments est aussi nulle, d'où $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\|$



Puisque $\|\vec{F}\| = \|\vec{f}_2\|$ et $\|\vec{T}\| = \|\vec{f}_1\|$ (tensions respectives de deux portions rectilignes du fil), nous déduisons $\|\vec{F}\| = \|\vec{T}\|$

$$(1) + (2) \text{ donne : } m \|\vec{g}\| - \frac{J_0 \cdot \gamma_0}{r^2} = m \gamma_0$$

$$\text{d'où } \gamma_0 = \frac{m \cdot \|\vec{g}\| \cdot r^2}{J_0 + m r^2} \quad (3)$$

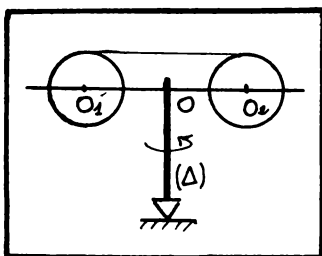
b) Calculons le moment d'inertie J_0 du système (C, B) : Pour cela, utilisons la relation (3) :

$$J_0 = \frac{m \cdot \|\vec{g}\| \cdot r^2}{\gamma_0} - m \cdot r^2 = 992 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_0 \approx 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Exercice n° 6

Une tige horizontale, de masse négligeable, est mobile sans frottement autour d'un axe vertical (Δ) passant par son milieu. Deux boules sphériques homogènes identiques de masses $M_1 = M_2 = 3,5 \text{ kg}$ et de rayons $R_1 = R_2 = 10 \text{ cm}$ sont traversées



par la tige. Elles sont maintenues par un fil inextensible dans la position où chacun des deux centres se trouve sur la tige à 20 cm de l'axe de rotation. Le système { tige + boules } tourne à la vitesse angulaire constante $\alpha' = 10 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Calculer le moment cinétique de ce système.

On donne: Le moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à un axe passant par son centre est:

$$J = \frac{2}{5} M R^2$$

Corrigé

Le moment cinétique du système tournant est donné par la relation $\sigma = J \cdot \alpha'$ (J étant le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation (Δ) et α' étant la vitesse angulaire du système).

Calculons J . Puisque la masse de la tige est négligeable, alors le moment d'inertie du système est égal à celui des deux boules: $J = J_1 + J_2$

L'axe (Δ) ne passe pas par les centres des boules. Il y a lieu d'appliquer le théorème de Huyghens pour chaque boule.

$$J_1 = \frac{2}{5} M_1 R_1^2 + M_1 (O_1 O)^2 \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{2}{5} M_2 R_2^2 + M_2 (O_2 O)^2$$

Posons $M_1 = M_2 = M$; $R_1 = R_2 = R$ et $O_1 O = O_2 O = d$, on obtient:

$$J = 2 \left(\frac{2}{5} M R^2 + M d^2 \right) = 2 M \left(\frac{2}{5} R^2 + d^2 \right)$$

L'expression du moment cinétique est :

$$\sigma = J \alpha' = 2 M \left(\frac{2}{5} R^2 + d^2 \right) \cdot \alpha'$$

$$\text{A.N: } \sigma = 2 \times 3,5 \left(\frac{2}{5} \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-2} \right) \times 10 \pi = 9,67 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice n° 7

Une tige homogène AB, de longueur $L = 0,4 \text{ m}$, a pour masse $m_1 = 0,5 \text{ kg}$. Sa section est très petite et constante. On fixe en A une surcharge S_1 supposée ponctuelle de masse $m_A = 0,1 \text{ kg}$ et en B une surcharge S_2 ponctuelle de masse $m_B = 0,2 \text{ kg}$.

1) Déterminer le centre de masse G du système {tige + surcharges}.

2) On pratique un trou très fin en G; on y fait passer une aiguille horizontale. On fait tourner le système {tige + surcharges}, dans le plan vertical, autour de l'aiguille horizontale, à la vitesse angulaire constante $\alpha' = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

Calculer le moment cinétique du système en rotation.

On donne: Le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe passant perpendiculairement en son milieu:

$$J = \frac{m L^2}{12}$$

Corrigé

1) Soit G_1 le milieu de la tige AB. Le centre de masse G du système {tige + surcharges} est le même que celui de 3 points matériels A, B et G_1 de masses respectives m_A , m_B et m_1 . G est donné par la relation :

$$(m_A + m_B + m_1) \cdot \overrightarrow{G_1 G} = m_1 \cdot \overrightarrow{G_1 G_1} + m_A \cdot \overrightarrow{G_1 A} + m_B \cdot \overrightarrow{G_1 B}$$

Projetons sur le repère $(0, \vec{i})$:

$$(m_A + m_B + m_1) \cdot \overline{G_1 G} = 0 - m_A \frac{L}{2} + m_B \frac{L}{2}$$

Nous en déduisons : $\overline{G_1 G} = \frac{L (m_B - m_A)}{2(m_1 + m_A + m_B)} = 0,025 \text{ m}.$

$\overline{G_1 G} > 0$: Le centre de masse G est situé entre G_1 et B.

2) Quand le système est en rotation, son moment cinétique est donné par la relation $\sigma = J \alpha'$, J étant le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation (Δ) passant par G. Calculons J.

$$J = J_{\text{tige}/\Delta} + J_{S_1/\Delta} + J_{S_2/\Delta}$$

Puisque S_1 et S_2 sont ponctuelles, $J_{S_1} = m_A \cdot (AG)^2$ et $J_{S_2} = m_B \cdot (BG)^2$

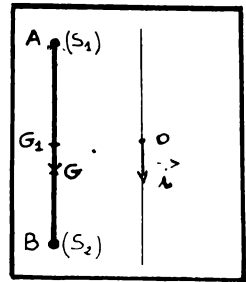
Pour la tige, appliquons le théorème de Huyghens: soit un axe (Δ') parallèle à (Δ) et passant par G_1 .

$$J_{\text{tige}/\Delta} = J_{\text{tige}/\Delta'} + m_1 \cdot (G_1 G)^2 = m_1 \frac{L^2}{12} + m_1 (G_1 G)^2$$

d'où : $J = m_1 \frac{L^2}{12} + m_1 \cdot (G_1 G)^2 + m_A (AG)^2 + m_B (BG)^2$

A.N: $J = 18,3 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$

$\sigma = J \cdot \alpha' = 18,3 \times 10^{-3} \times 4 \times 3,14 = 0,23 \text{ kg.m}^2 \cdot \text{rad.s}^{-1}.$



II- ELECTROMAGNETISME

PRINCIPAUX RESULTATS

A// CHAMP MAGNÉTIQUE $\vec{B}$; $\vec{B}$ TERRESTRE ; SUPERPOSITION DE

DEUX CHAMPS

** Un champ magnétique se caractérise par un vecteur $\vec{B}$ dont la direction et le sens sont ceux de l'axe $\vec{sn}$ d'une aiguille aimantée placée au point considéré. La valeur de $\vec{B}$ s'exprime en tesla (T) . Un champ magnétique est uniforme si $\vec{B}$ est le même en tous les points de l'espace considéré, les lignes de champ sont alors des droites parallèles; exemples: entre les branches d'un aimant en U, à l'intérieur d'un solénoïde très long...

** Le champ magnétique terrestre est pratiquement uniforme dans une région peu étendue; $\vec{B}$ terrestre est oblique pointant vers le bas; sa composante horizontale $\vec{B}_H$ oriente, en l'absence d'autres champs, une aiguille aimantée mobile autour d'un axe vertical dans un plan horizontal.

** Si deux ou plusieurs champs magnétiques existent ensemble en un même lieu, leur effet est équivalent à un seul champ magnétique de vecteur égal à la somme des vecteurs champs.

B// CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN COURANT

** $\vec{B}_c$ créé par un courant rectiligne en un point de l'espace qui l'entoure a les caractéristiques suivantes:

- direction: perpendiculaire au plan contenant le conducteur et le point considéré,
- sens: vers la gauche d'un observateur placé contre le conducteur, traversé par le courant des pieds vers la tête et regardant vers le point considéré,

- valeur: $\|\vec{B}_c\| = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{d}$ (d = distance entre le conducteur et le point exprimée en mètre)

** Le champ magnétique créé par le courant qui passe dans dans une bobine plate ou un solénoïde est orienté de la face sud de la bobine vers sa face nord (la face S est celle devant laquelle on se place pour voir le courant circuler dans le sens direct des aiguilles d'une montre).

A l'intérieur d'une bobine plate, $\vec{B}_c$ n'est pas uniforme; en son centre, $\|\vec{B}_c\| = 2\pi \cdot 10^{-7} N \frac{I}{r}$ (N = nombre de spires, r = leur rayon moyen).

A l'intérieur d'un solénoïde très long, $\vec{B}_C$ est pratiquement uniforme, sa valeur est: $\|\vec{B}_C\| = 4 \pi \cdot 10^{-7} n I$
(n = nombre de spires par unité de longueur de la bobine).

C// ACTION DE $\vec{B}$ SUR UN COURANT

L'action d'un champ $\vec{B}$ sur un conducteur rectiligne parcouru par un courant équivaut à une force (appelée force de Laplace) qui a les caractéristiques suivantes:

- direction: normale au plan formé par $\vec{B}$ et le conducteur,
- sens: vers la gauche d'un observateur placé contre le conducteur, traversé par le courant des pieds vers la tête , et regardant dans le sens de $\vec{B}$.

- valeur: $\|\vec{F}\| = I L \|\vec{B}\| \sin \alpha$

L = longueur du conducteur soumise à l'action de $\vec{B}$; α = angle inférieur à 180° entre le vecteur champ et le conducteur.

D// FLUX MAGNÉTIQUE

On définit le flux magnétique comme étant une grandeur caractérisant l'importance du nombre des lignes de champ traversant une surface fermée.

$$\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Φ s'exprime en weber (Wb) dans le S.I

Le vecteur surface $\vec{S}$ est perpendiculaire à la surface et orienté vers la gauche d'un observateur placé contre une partie du contour de la surface , traversé des pieds vers la tête par la flèche indiquant le sens positif arbitraire choisi sur ce contour, et regardant vers l'intérieur du contour.

**REGLE DU FLUX EXTREMUM :

Si un circuit fermé est parcouru par un courant d'intensité i et il est capable de se mouvoir dans un espace champ magnétique, il tend à prendre la position d'équilibre stable pour laquelle il est traversé par un flux de valeur absolue maximale.

** LOI DE MAXWELL:

Si un circuit fermé parcouru par un courant d'intensité i se déplace dans un espace champ magnétique, le travail des forces électromagnétiques qui agissent sur le circuit est égal au produit de la valeur algébrique de l'intensité du courant par la variation du flux magnétique à travers ce circuit fermé.

$$W = i (\Phi_2 - \Phi_1)$$

E// INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Une variation de flux magnétique engendre une f.é.m induite:

$e = - \frac{d\Phi}{dt}$; la f.e.m induite et le courant induit ont tous deux le signe contraire de celui de la variation de

flux qui lui a donné naissance; leur effet est de modérer cette variation de flux (loi de LENZ).

**Le flux propre à travers une bobine est le flux du champ $\vec{B}_C$ créé par le courant passant dans cette bobine, à travers les spires de cette même bobine. Il est proportionnel à l'intensité du courant:

$$\Phi_p = L.i \quad (L \text{ est l'inductance de la bobine exprimée en henry "H").}$$

La variation du flux propre produit une f.é.m auto-induite:

$$e = - L . \frac{di}{dt}$$

F// ACTION DE $\vec{B}$ SUR UNE PARTICULE CHARGÉE EN MOUVEMENT

L'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ sur une particule portant une charge électrique q et animée d'une vitesse $\vec{v}$ équivaut à une force (appelée force de LORENTZ) qui a les caractéristiques suivantes :

- direction: orthogonale au plan ($\vec{v}$, $\vec{B}$)
- sens: vers la gauche d'un observateur traversé par ($q\vec{v}$)

des pieds vers la tête et regardant dans le sens de $\vec{B}$. (attention au signe de q !)

$$\text{- valeur: } \|\vec{F}\| = |q| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha$$

α = angle inférieur à 180° entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Remarque importante:

Il existe de nombreuses méthodes d'orientation pour le champ magnétique créé par un courant, pour la force de Laplace, pour la force de Lorentz, pour le vecteur surface...(main droite, trois doigts de la main droite ou de la main gauche, tire-bouchon de Maxwell, trièdre direct.....) Toutes les méthodes font aboutir au même résultat si elles sont correctement utilisées.

Nous conseillons à l'élève de disposer d'une figurine en carton fort, représentant une personne sur laquelle il aura représenté les yeux et le bras gauche tendu.

La composante horizontale du champ magnétique terrestre sera

désignée par $\vec{B}_H$ et on adoptera la valeur $\|\vec{B}_H\| = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$

1 -

CHAMP MAGNETIQUE TERRESTRE SUPERPOSITION DE DEUX CHAMPS MAGNETIQUES

Exercice n° 1

Une aiguille aimantée est mobile dans un plan horizontal autour d'un pivot vertical passant en un point O de l'aiguille très près de son centre d'inertie. On crée dans la région d'espace où se trouve cette aiguille, deux champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ devant lesquels on néglige le champ magnétique terrestre. Les valeurs des deux champs seront exprimées en tesla (T). On définit dans le plan horizontal contenant l'aiguille un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe $\vec{sn}$ de l'aiguille possède la même direction et le même sens que $\vec{i}$ avant la création des deux champs.

1) Préciser l'orientation de $\vec{i}$ dans le lieu considéré.

2) Déterminer la position d'équilibre de l'aiguille aimantée par l'angle α que fait son axe $\vec{sn}$ avec $\vec{i}$ et calculer la valeur du champ $\vec{B}$ résultant au point O dans les cas suivants:

- a) $\vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 10^{-2} \vec{j}$; $\vec{B}_2 = 3 \cdot 10^{-2} \vec{j}$
 b) $\vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-2} \vec{i}$; $\vec{B}_2 = 3 \cdot 10^{-2} \vec{j}$

Corrigé

Avant la création des deux champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$, l'aiguille aimantée est soumise au champ magnétique terrestre. Etant mobile dans un plan horizontal, l'aiguille s'oriente suivant la composante horizontale $\vec{B}_H$, de manière que son axe $\vec{sn}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{B}_H$, c - à - d dirigé et orienté du sud magnétique vers le nord magnétique du lieu. Nous concluons finalement que $\vec{i}$, qui a la même direction et le même sens que l'axe $\vec{sn}$ de l'aiguille, est lui-même dirigé et orienté du sud magnétique vers le nord magnétique du lieu de l'expérience.

2) Après la création des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$, le champ magnétique terrestre devient négligeable. L'aiguille aimantée prend la position d'équilibre pour laquelle son axe $\vec{sn}$ a la direction et le sens de la résultante $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$\vec{B}_1 = B_{1x} \vec{i} + B_{1y} \vec{j} ; \quad \vec{B}_2 = B_{2x} \vec{i} + B_{2y} \vec{j}$$

La somme des deux champs est $\vec{B} = (B_{1x} + B_{2x}) \vec{i} + (B_{1y} + B_{2y}) \vec{j}$

or $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$ donc :

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} \quad \text{et} \quad B_y = B_{1y} + B_{2y}$$

$\vec{B}$ fait avec $\vec{i}$ un angle α tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_{1y} + B_{2y}}{B_{1x} + B_{2x}}$$

La valeur de $\vec{B}$ peut être calculée en faisant appel au théorème de Pythagore ou en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{B}_x\|}{\cos \alpha} = \frac{\|\vec{B}_y\|}{\sin \alpha}$$

a) $\vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-2} \vec{i} + 10^{-2} \vec{j}$; $\vec{B}_2 = 3 \cdot 10^{-2} \vec{j}$

Le champ résultant a pour composantes :

$$B_x = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} ; \quad B_y = 4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2 \implies \alpha = 63,4^\circ$$

Faisons appel à l'une des trois méthodes décrites plus haut pour la détermination de la valeur du champ résultant :

$$\|\vec{B}\| = 4,47 \times 10^{-2} \text{ T}$$

b) $\vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-2} \vec{i}$; $\vec{B}_2 = 3 \cdot 10^{-2} \vec{j}$

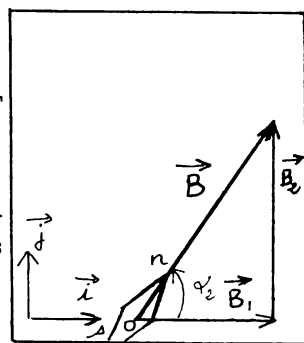
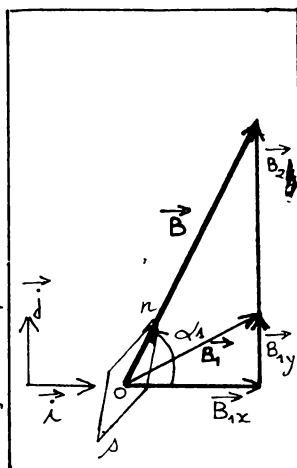
Le champ résultant a pour composantes :

$$B_x = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} ; \quad B_y = 3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 1,5 \implies \alpha = 56,3^\circ$$

En utilisant encore le théorème de Pythagore ou le sinus ou le cosinus de α , nous obtenons :

$$\|\vec{B}\| = 3,6 \times 10^{-2} \text{ T}$$



Exercice n° 2

Une aiguille aimantée est mobile dans un plan horizontal autour d'un pivot vertical.

1) Montrer que la pointe du pivot doit être nécessairement un peu écartée du centre d'inertie de l'aiguille pour que cette dernière puisse être en équilibre en position horizontale sur la pointe du pivot.

2) L'aiguille pèse 10^{-1} N. On admettra que lorsqu'elle se trouve dans un champ magnétique uniforme dont le vecteur $\vec{B}$ fait avec son axe $\vec{sn}$ un angle α , l'aiguille subit une action qui tend à l'orienter suivant $\vec{B}$, équivalente à un couple de forces dont le moment par rapport à l'axe-pivot a pour valeur absolue :

$$|M| = 0,2 \cdot \|\vec{B}\| \sin \alpha \quad (|M| \text{ en m.N et } \|\vec{B}\| \text{ en T})$$

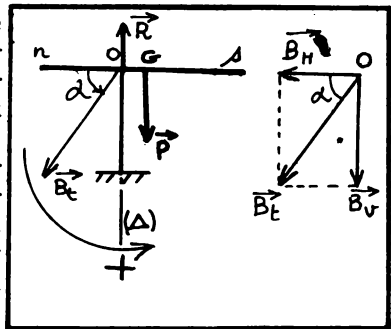
Sachant que l'inclinaison magnétique du lieu est égale à 60° et que la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 2×10^{-5} T, calculer la distance entre la pointe du pivot et le centre d'inertie de l'aiguille aimantée.

N.B: Le facteur "0,2" qui intervient dans le moment du couple représente une grandeur caractéristique d'un aimant droit appelée "moment magnétique", dépendant du degré d'aimantation et ne faisant pas partie du programme officiel.

Corrigé

1) Considérons l'aiguille aimantée mobile autour du pivot vertical. Si ce pivot passait par le centre d'inertie de l'aiguille, le poids de l'aiguille et la réaction de l'axe auraient chacun un moment nul par rapport à ce pivot et l'aiguille prendrait la position imposée par le champ magnétique terrestre : l'aiguille prendrait la position où son axe $\vec{sn}$ a la même direction et le même sens que le vecteur champ magnétique terrestre, donc elle serait oblique et ferait un angle de 60° avec l'horizontale, son pôle n pointant vers le bas. Pour que l'aiguille soit horizontale, il faut que l'effet de rotation du champ magnétique terrestre sur l'aiguille aimantée soit compensé par un effet de rotation en sens contraire. La réaction du pivot ayant toujours un moment nul, c'est nécessairement le poids qui produit l'effet de rotation capable d'équilibrer l'aiguille aimantée : la droite d'action du poids ne doit pas être confondue avec l'axe de rotation, la pointe du pivot doit être écartée du centre d'inertie de l'aiguille.

2) Soit le système aiguille aimantée. Ce système est en équilibre sous l'action du champ magnétique terrestre et sous l'action du champ de pesanteur terrestre. Pour que le système soit en équilibre, il faut que la somme des moments des forces extérieures soit nulle, les moments étant définis par rapport à l'axe vertical (Δ) qui passe par la pointe O du pivot.



Désignons par M_1 le moment du couple de forces dû à $\vec{B}$ terrestre et par M_2 le moment du poids. Choisissons un sens positif de rotation. La condition d'équilibre s'écrit :

$$M_1 + M_2 = 0 \implies 0,2 \|\vec{B}_t\| \sin \alpha - \|\vec{P}\| \cdot OG = 0 \quad (1)$$

$$\text{Calculons } \|\vec{B}\| : \frac{\|\vec{B}_H\|}{\|\vec{B}_t\|} = \cos \alpha \implies \|\vec{B}_t\| = \frac{\|\vec{B}_H\|}{\cos \alpha}$$

$$\text{La relation (1) donne alors: } 0,2 \|\vec{B}_H\| \operatorname{tg} \alpha - \|\vec{P}\| OG = 0 \quad (2)$$

De (2) nous déduisons l'écart pointe - centre d'inertie :

$$OG = \frac{0,2 \|\vec{B}_H\| \operatorname{tg} \alpha}{\|\vec{P}\|} = 6,9 \times 10^{-5} \text{ m}$$

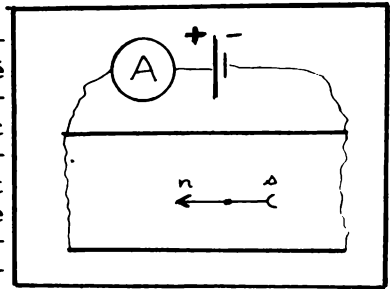
2 - CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT

Exercice n° 1

1) Soit un fil de cuivre horizontal de 5 m de longueur et de 0,2 mm de diamètre, tendu entre deux points fixes suivant la direction sud - nord magnétique du lieu. Au-dessous de ce fil, à 2 cm de lui, se trouve une aiguille aimantée horizontale capable de tourner autour d'un axe vertical. On relie les extrémités du fil de cuivre aux deux pôles d'un générateur de tension de f.é.m $E = 6 \text{ V}$, par l'intermédiaire de fils conducteurs et d'un ampèremètre de résistance totale $R' = 1,5 \Omega$. L'aiguille aimantée tourne d'un angle α et s'immobilise dans cette nouvelle position d'équilibre. Expliquer la déviation de l'aiguille en s'aidant d'un schéma très clair représentant ce qui se passe dans le plan horizontal contenant l'aiguille. Calculer la valeur de l'angle α .

2) On considère un second fil de cuivre identique au précédent, tendu sous l'aiguille aimantée à 1 cm de celle-ci et parallèlement au premier fil.

a) Dans une première expérience, le deuxième fil est connecté au moyen de fils de résistance négligeable, en dérivation avec le premier fil aux bornes du générateur de tension précédent qui est encore en série avec l'ampèremètre comme au "1)". Que devient la nouvelle position d'équilibre de l'aiguille aimantée ?

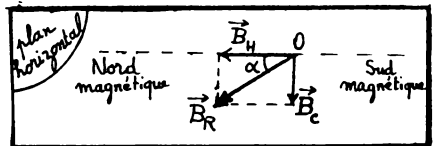
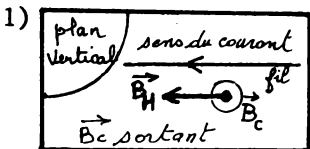


b) Dans une deuxième expérience, le deuxième fil n'a aucune liaison avec le premier fil et, alors que le premier fil est parcouru par le même courant qu'au "1)", le deuxième fil est parcouru par un courant de même sens et d'intensité égale à la moitié de celle du courant qui passe dans le premier fil. Quelle est la nouvelle position d'équilibre de l'aiguille aimantée dans cette dernière expérience ?

Données : Résistivité du cuivre: $\rho = 1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$$\|\vec{B}_H\| = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Corrigé



Avant le passage du courant dans le fil de cuivre, l'aiguille aimantée est telle que son axe $\vec{sn}$ a la même direction et le même sens que $\vec{B}_H$ terrestre. Le courant électrique passant dans le fil de cuivre crée au point O milieu de l'aiguille un champ

magnétique $\vec{B}_c$ ayant les caractéristiques suivantes :

- direction : $\vec{B}_c$ est perpendiculaire au plan contenant le fil et le point O; $\vec{B}_c$ est ainsi horizontal,
- sens : vers la gauche d'un observateur, couché sur le fil, traversé par le courant des pieds vers la tête et regardant vers O : $\vec{B}_c$ est donc sortant pour le plan de la figure,
- valeur : $\|\vec{B}_c\| = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{d}$

L'aiguille aimantée s'immobilise dans la position où son axe $\vec{sn}$ a même direction et même sens que le champ résultant $\vec{B}_R = \vec{B}_H + \vec{B}_c$.
L'aiguille aura donc dévié d'un angle $\alpha = (\vec{B}_H, \vec{B}_R)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\|\vec{B}_c\|}{\|\vec{B}_H\|} = \frac{2 \times 10^{-7} \times I}{d \times \|\vec{B}_H\|}$$

L'intensité du courant est, d'après la loi de Pouillet :

$$I = \frac{E}{R + R'}$$

R = résistance du fil de cuivre
R' = résistance de l'ampèremètre et des fils de connexion.

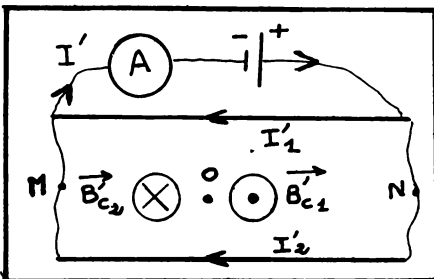
$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{4 \cdot \rho \cdot L}{\pi D^2} \quad \text{avec } D = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{A.N:} \quad R = \frac{4 \times 1,6 \times 10^{-8} \times 5}{3,14 \times 4 \times 10^{-8}} = 2,55 \text{ ohms}$$

$$I = \frac{6}{1,5 + 2,55} = 1,48 \text{ A}$$

$$\text{d'où} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \times 10^{-7} \times 1,48}{0,02 \times 2 \times 10^{-5}} = 0,74 \implies \alpha = 36,5^\circ$$

2) a) Le courant d'intensité I' se divise en deux courants de même sens, d'intensités I'_1 et I'_2 . L'observateur d'Ampère nous donne au point O un champ $\vec{B}'_{c1}$ sortant et un champ $\vec{B}'_{c2}$ rentrant pour le plan de la figure qui est le plan vertical contenant les fils et le point O. L'aiguille s'oriente



suivant la somme de $\vec{B}'_{c1}$, $\vec{B}'_{c2}$ et $\vec{B}_H$. Calculons les valeurs de $\vec{B}'_{c1}$ et de $\vec{B}'_{c2}$ pour déterminer le sens de $\vec{B}' = \vec{B}'_{c1} + \vec{B}'_{c2}$.

Les deux fils identiques montés en parallèle ont une résistance équivalente R_{eq} telle que $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$

$$R_{eq} = R / 2 = 1,275 \Omega$$

$$I' = \frac{E}{R_{\text{eq}} + R'}$$

A.N: $I' = \frac{6}{1,275 + 1,5} = 2,16 \text{ A}$

Les deux fils étant identiques, la relation $U_{MN} = R_1 I'_1 = R_2 I'_2$ avec $R_1 = R_2$ nous donne $I'_1 = I'_2 = I' / 2 \implies I'_1 = I'_2 = 1,08 \text{ A}$

$$\|\vec{B}'_{C_1}\| = 2 \times 10^{-7} \frac{I'_1}{d_1} = 1,08 \times 10^{-5} \text{ T}$$

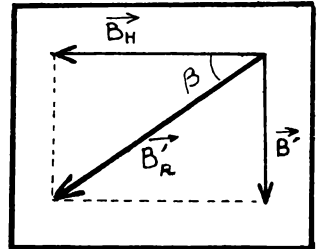
$$\|\vec{B}'_{C_2}\| = 2 \times 10^{-7} \frac{I'_2}{d_2} = 2,16 \times 10^{-5} \text{ T}$$

La somme de $\vec{B}'_{C_1}$ et $\vec{B}'_{C_2}$ est un champ rentrant pour le plan de la figure puisque $\vec{B}'_{C_2}$ est plus intense que $\vec{B}'_{C_1}$. Cette somme a pour valeur $\|\vec{B}'\| = (2,16 - 1,08) \times 10^{-5} = 1,08 \times 10^{-5} \text{ T}$

Considérons le plan horizontal contenant le point O.

L'aiguille aimantée s'oriente suivant la somme $\vec{B}'_R$ de $\vec{B}_H$ et $\vec{B}'$. Elle forme à l'équilibre un angle β avec $\vec{B}_H$ tel que:

$$\text{tg } \beta = \frac{\|\vec{B}'\|}{\|\vec{B}_H\|} = \frac{1,08 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}} = 0,54 \implies \beta \approx 29^\circ$$



b) Les fils étant parcourus par des courants de même sens comme au "2)a)";

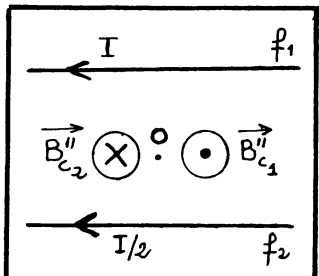
on a encore deux champs $\vec{B}''_{C_1}$ et $\vec{B}''_{C_2}$ respectivement sortant et rentrant pour le plan de la figure.

$$\|\vec{B}''_{C_1}\| = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{d} ; \|\vec{B}''_{C_2}\| = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{\frac{d}{2}} = \|\vec{B}''_{C_1}\|$$

Les deux champs ont la même valeur, leur somme est nulle.

L'aiguille aimantée s'oriente par le champ magnétique terrestre, comme en l'absence de tout courant dans les fils.

Son axe $\vec{sn}$ prend l'orientation sud $\rightarrow$ nord magnétique du lieu.



Exercice n° 2

On dispose d'un fil de cuivre de diamètre $D = 0,1 \text{ mm}$ et de longueur $L = 10 \text{ m}$. On réalise au moyen de ce fil une bobine plate de rayon moyen $r = 0,1 \text{ m}$. On place cette bobine de manière que le plan moyen des spires soit contenu dans le plan méridien magnétique du lieu. Au centre de la bobine, se trouve une aiguille aimantée mobile dans un plan horizontal autour d'un axe vertical. On branche la bobine aux bornes d'un générateur de tension de f.é.m $E = 6 \text{ V}$. L'aiguille aimantée dévie et s'immobilise dans une position faisant un angle α avec la position initiale.

Expliquer la déviation de l'aiguille aimantée en s'aidant d'un schéma très soigné représentant ce qui se passe dans le plan horizontal contenant l'aiguille aimantée. calculer l'angle α .

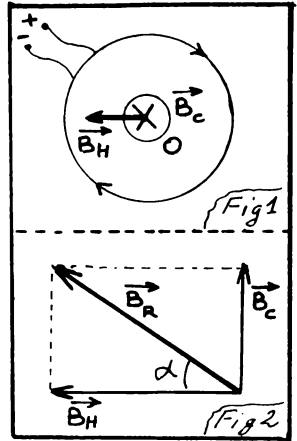
On donne : Résistivité du cuivre: $\rho = 1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$

$$\|\vec{B}_H\| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Corrigé

Avant le passage du courant dans la bobine plate, l'axe $\vec{sn}$ de l'aiguille était dans le plan moyen des spires puisque ce dernier est contenu dans le méridien magnétique du lieu; cet axe $\vec{sn}$ avait la direction et le sens de $\vec{B}_H$ (composante horizontale du champ magnétique terrestre).

Le courant électrique parcourant la bobine plate produit au centre de cette bobine un champ magnétique $\vec{B}_C$ perpendiculaire au plan des spires et orienté de la face sud de la bobine vers sa face nord, la face sud étant celle devant laquelle on doit se placer pour voir le sens du courant confondu avec le sens direct des aiguilles d'une montre.



La valeur de $\vec{B}_C$ au centre O est $\|\vec{B}_C\| = 2\pi \times 10^{-7} \frac{N \cdot I}{r}$

L'aiguille aimantée s'immobilise dans la position où son axe $\vec{sn}$ a la direction et le sens de $\vec{B}_R$ somme de $\vec{B}_H$ et $\vec{B}_C$ (fig 2)

L'aiguille fait alors avec $\vec{B}_H$ un angle α tel que:

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{B}_C\|}{\|\vec{B}_H\|} = 2\pi \times 10^{-7} \frac{N \cdot I}{r \cdot \|\vec{B}_H\|}$$

Pour calculer le nombre N de spires, nous divisons la longueur du fil par le périmètre moyen d'une spire (attention! ne pas confondre le rayon moyen d'une spire avec le rayon de la section du fil).

Pour calculer l'intensité I, nous appliquons la loi de Pouillet. Nous devons donc calculer la résistance électrique de la bobine

$$\text{Nombre de spires: } N = \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{10}{2 \times 3,14 \times 0,1} \approx 16$$

$$\text{Résistance de la bobine: } R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{\pi \frac{D^2}{4}} \implies R = 20,4 \Omega$$

Le générateur de tension a une résistance négligeable, ainsi que les fils de jonction, donc $E = R \cdot I$; d'où $I = E/R = 0,294 \text{ A}$

Nous remplaçons N, I, r et $\|\vec{B}_H\|$ par leurs valeurs numériques dans l'expression de $\tan \alpha$; cela donne : $\tan \alpha = 1,48 \implies \alpha \approx 56^\circ$

Commentaire :

Le sens de $\vec{B}_C$ produit par le courant au centre de la bobine peut être obtenu par d'autres méthodes:

- Ce champ est orienté vers la gauche d'un observateur placé contre le fil de la bobine, regardant vers le centre O, tout en étant parcouru par le courant des pieds vers la tête,

- On peut imaginer un tire-bouchon qu'on fait tourner dans le sens du courant: sa pointe progresse alors dans le sens de $\vec{B}_C$

- Plaçant la main droite contre le fil de la bobine, la paume tournée vers O, le courant passant du poignet vers le bout des doigts, le pouce disposé perpendiculairement aux autres doigts nous donne le sens du champ magnétique créé par le courant.

Exercice n° 3

On dispose d'un fil homogène conducteur de section constante et de longueur L bien déterminée. On réalise avec ce fil une bobine plate. Faut-il enrouler le fil en une bobine plate de 500 spires ou en une bobine plate de 2000 spires pour que le champ magnétique créé par un courant d'intensité I donnée soit plus grand au centre de la bobine réalisée ? Calculer le rapport des valeurs des champs obtenus aux centres des 2 bobines.

Corrigé

Soit L la longueur du fil à bobiner. Si on enroulait ce fil en une bobine plate de N spires, elle aurait un rayon moyen r tel que :

$$L = N \times 2\pi r \quad \text{donc} \quad r = \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot N}$$

Un courant d'intensité I parcourant cette bobine produirait en son centre un champ magnétique $\vec{B}_C$ de valeur:

$$\|\vec{B}_C\| = 2\pi \times 10^{-7} \frac{N \cdot I}{r} = 2\pi \cdot 10^{-7} N \cdot I \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{L} = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{L} \cdot I$$

Nous voyons que pour une longueur L de fil bobiné et une intensité de courant I données, $\|\vec{B}_C\|$ est proportionnel au carré du nombre de spires. Nous concluons que nous devons réaliser avec le fil une bobine plate de 2000 spires pour obtenir en son centre un champ magnétique plus intense que celui que l'on obtiendrait en bobinant le fil en 500 spires.

Le rapport des valeurs des champs magnétiques obtenus aux centres des deux bobines est :

$$\frac{\|\vec{B}_{C1}\|}{\|\vec{B}_{C2}\|} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{2000^2}{500^2} = 16$$

Avec N = 2000 spires, le champ magnétique créé par le courant au centre de la bobine est 16 fois plus intense qu'avec N = 500 spires.

Exercice n° 4

Une bobine plate est formée de $N = 100$ spires de rayon moyen $r = 10$ cm, en fil de cuivre de diamètre $D = 0,2$ mm.

1) Quelle est la résistance de cette bobine plate ?

2) Le plan moyen des spires est dans le plan méridien magnétique du lieu. Au centre de la bobine, une petite aiguille aimantée peut tourner dans un plan horizontal autour d'un axe vertical. Calculer l'intensité I d'un courant électrique continu qui, parcourant la bobine, provoque une rotation de 30° de l'aiguille aimantée.

3) On place en dérivation aux bornes de la bobine précédente, un résistor de résistance $R' = 10 \Omega$. Le courant précédent d'intensité I calculée au " 2) " se partage entre la bobine plate et le résistor. De quel angle et dans quel sens dévie l'aiguille aimantée à partir de la position d'équilibre trouvée dans la deuxième question ?

Données : Résistivité du cuivre: $\rho = 1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$

$$\|\vec{B}_H\| = 2 \times 10^{-5} T$$

Corrigé

1) Résistance de la bobine :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \rho \cdot \frac{N \cdot 2 \pi r}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} = \frac{4 \rho N \times 2 \pi \cdot r}{\pi \cdot D^2} = \frac{8 \rho N \cdot r}{D^2}$$

$$A.N: R = 32 \Omega$$

2) Cette question est exactement analogue à l'exercice n° 2 du présent chapitre.

On trouve pour la déviation de l'aiguille aimantée quand le courant passe dans la bobine:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\|\vec{B}_c\|}{\|\vec{B}_H\|} = \frac{2 \pi \cdot 10^{-7} \times N \cdot I}{r \cdot \|\vec{B}_H\|}$$

L'intensité du courant est donc :

$$I = \frac{r \times \|\vec{B}_H\| \times \operatorname{tg} \alpha}{2 \pi \times 10^{-7} \times N} = 1,84 \times 10^{-3} A$$

3) Le courant d'intensité I se partage entre la bobine plate précédente et un résistor de résistance $R' = 10 \Omega$.

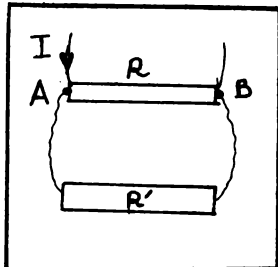
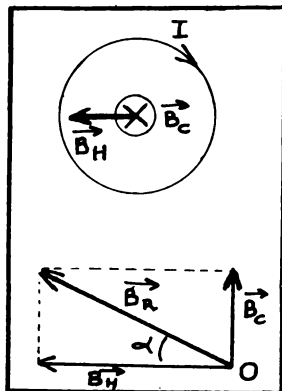
Soit I_1 l'intensité du courant qui traverse la bobine et I_2 l'intensité du courant qui parcourt le résistor de résistance R' .

$$\text{On a : } I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$U_{AB} = R \cdot I_1 = R' \cdot I_2 \quad (2)$$

$$(2) \quad I_2 = \frac{R}{R'} \cdot I_1 \quad (3) \text{ qui dans (1) donne } I = I_1 \left(1 + \frac{R}{R'} \right)$$

$$\text{d'où: } I_1 = I / \left(1 + R/R' \right) = 4,38 \times 10^{-3} A.$$

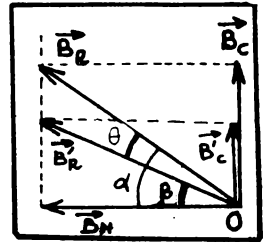


L'angle β que fait l'aiguille avec $\vec{B}_H$ est alors donné par :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\|\vec{B}_C'\|}{\|\vec{B}_H\|} = \frac{2\pi \times 10^{-7} \cdot N \cdot I_1}{r \cdot \|\vec{B}_H\|}$$

A.N : $\operatorname{tg} \beta = 0,137 \implies \beta = 7,8^\circ$

L'aiguille aimantée tourne, à partir de la position qu'elle occupait avant de brancher le résistor aux bornes de la bobine, d'un angle $\theta = \alpha - \beta = 22,2^\circ$ dans le sens qui ramène son axe $\vec{sn}$ vers la direction et le sens de $\vec{B}_H$.



Exercice n° 5

La valeur du champ magnétique créé au centre O d'un solénoïde, par un courant d'intensité I passant dans ce solénoïde, est donnée par la formule:

$$\|\vec{B}_{CO}\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N \cdot I}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}$$

N étant le nombre de spires, ℓ la longueur du solénoïde et r le rayon des spires.

1) Montrer que pour ℓ très petite devant r , on retrouve la formule relative à une bobine plate.

2) Quelle condition doit remplir le rapport $\frac{r}{\ell}$ pour que la valeur de $\vec{B}_C$ diffère de moins de 1% de la valeur qu'on obtient en appliquant la formule relative à un solénoïde très long:

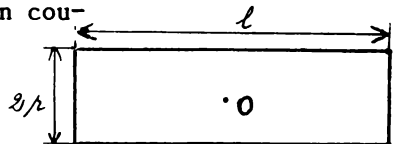
$$\|\vec{B}_C\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I \quad ?$$

Est-ce que cette condition est vérifiée pour une bobine de rayon $r = 3 \text{ cm}$ et de longueur $\ell = 15 \text{ cm}$?

Corrigé

1) La valeur du champ magnétique créé au centre d'un solénoïde par un courant qui traverse ce solénoïde est:

$$\|\vec{B}_{CO}\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N \cdot I}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}$$



N , ℓ , r et I étant respectivement le nombre de spires, la longueur du solénoïde (très différente de la longueur du fil bobiné), le rayon des spires et l'intensité du courant.

Considérons un solénoïde de longueur ℓ très petite par rapport au rayon r des spires: un tel solénoïde est une bobine plate.

$\ell \ll r \implies \ell^2 \ll r^2$; on néglige alors ℓ^2 devant $4r^2$; on a ainsi:

$$\|\vec{B}_{CO}\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot I / \sqrt{4r^2} = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot NI / r$$

On retrouve la formule donnant la valeur du champ magnétique créé par le courant passant dans une bobine plate, au centre de cette bobine.

2) Pour un solénoïde de longueur très grande par rapport au rayon des spires, on a: $\ell^2 \gg 4r^2$ et

$$\|\vec{B}_{C0}\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{NI}{\ell}$$

On retrouve la formule donnant la valeur du champ magnétique uniforme à l'intérieur d'un solénoïde très long.

Pour que la valeur de $\vec{B}_C$ au centre O d'un solénoïde de longueur ℓ diffère de moins de 1 % de la valeur de $\vec{B}_C$ uniforme à l'intérieur d'un solénoïde très long, il faut que:

$$\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{NI}{\ell} - 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{NI}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{NI}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}} < 10^{-2}$$

Simplifions par $4\pi \cdot 10^{-7} NI$:

$$\frac{\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}}{\frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}} < 10^{-2} \implies \frac{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}{\ell} - 1 < 10^{-2}$$

$$\frac{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}{\ell} < 1,01 \implies \sqrt{\ell^2 + 4r^2} < 1,01\ell$$

Elevons au carré: $\ell^2 + 4r^2 < 1,02\ell^2$ d'où $4r^2 < 0,02\ell^2$

Le solénoïde doit vérifier la relation $\frac{r^2}{\ell^2} < \frac{0,02}{4} = 0,005$

ou encore $r < 0,0707\ell$

Pour un solénoïde de rayon $r = 3$ cm et de longueur $\ell = 15$ cm, on a $\frac{r}{\ell} = \frac{3}{15} = 0,2$. La condition trouvée ci-dessus n'est pas

vérifiée, le champ magnétique créé par le courant qui passe dans cette bobine, diffère au centre O de la bobine de plus de 1% du champ créé par un courant de même intensité à l'intérieur d'un solénoïde très long.

Exercice n° 6

Une aiguille aimantée horizontale mobile autour d'un axe vertical est placée à l'intérieur d'un solénoïde d'axe horizontal X'X. On peut orienter le solénoïde en le faisant tourner autour d'un axe vertical qui coïncide avec l'axe autour duquel tourne l'aiguille aimantée.

1) L'axe X'X du solénoïde est orienté perpendiculairement

à la direction de l'aiguille aimantée. On fait passer un courant d'intensité i dans le solénoïde. De quel angle tourne l'aiguille aimantée ?

A.N : Nombre de spires du solénoïde: $N = 1000$; longueur de cette bobine: $\ell = 1,20 \text{ m}$; $i = 10 \text{ mA}$; $\|\vec{B}_H\| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

2) Le courant précédent étant maintenu, on fait tourner le solénoïde à partir de la position précédente jusqu'à ce que l'aiguille se trouve parallèle au plan des spires. Calculer pour cette nouvelle position, l'angle β que fait l'aiguille avec le méridien magnétique. Montrer que deux positions du solénoïde répondent à cette question.

3) On augmente progressivement la valeur de i . A partir de quelle intensité devient-il impossible de trouver une orientation du solénoïde répondant à la deuxième question ?

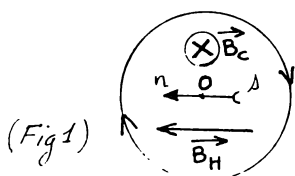
(Bac Français)

Corrigé

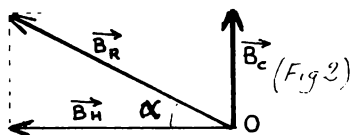
1) Lorsque l'axe $X'X$ du solénoïde est orienté perpendiculairement à la direction de l'aiguille aimantée, l'axe $\vec{sn}$ de l'aiguille est contenu dans le plan d'une spire, et ce plan est confondu avec le méridien magnétique du lieu.

Si un courant électrique d'intensité i passe dans le solénoïde, il produit à l'intérieur de cette bobine un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}_c$ ayant la même direction que l'axe du solénoïde. Ce champ est orienté de la face sud du solénoïde vers sa face nord (la face sud étant celle devant laquelle on se place pour voir le sens du courant confondu avec le sens direct des aiguilles d'une montre).

Représentons la spire contenant l'aiguille aimantée dans son plan (fig 1) et le plan horizontal contenant le centre O du solénoïde, milieu de l'aiguille (fig 2).



(Fig 1)



(Fig 2)

L'aiguille aimantée s'oriente de façon que son axe $\vec{sn}$ ait la direction et le sens de $\vec{B}_R$ somme de $\vec{B}_c$ et $\vec{B}_H$.

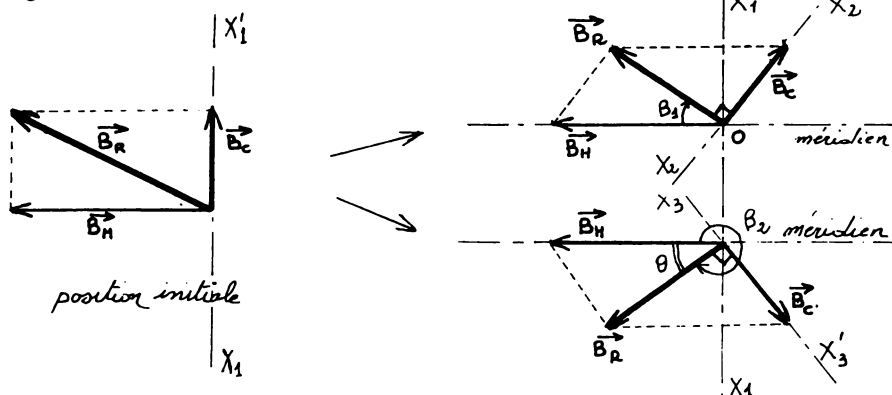
L'aiguille dévie ainsi d'un angle α tel que $\text{tg } \alpha = \frac{\|\vec{B}_c\|}{\|\vec{B}_H\|}$

Supposons que le solénoïde a une longueur très supérieure au rayon des spires. Le champ magnétique créé par le courant à l'intérieur du solénoïde est uniforme, sa valeur est :

$$\|\vec{B}_c\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{\ell} i \implies \text{tg } \alpha = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot i}{\ell \cdot \|\vec{B}_H\|}$$

$$\text{A.N: } \text{tg } \alpha = 0,523 \implies \alpha = 27,6^\circ$$

2) Le courant précédent étant maintenu, on fait tourner le solénoïde autour de l'axe (Δ) jusqu'à ce que l'aiguille se trouve parallèle au plan des spires. Attention ! Ne confondons pas l'axe (Δ) vertical autour duquel tournent le solénoïde et l'aiguille aimantée, et l'axe $X'X$ horizontal de la bobine longue.



Dans chacune des deux positions obtenues par rotation de l'aiguille aimantée, représentées dans les figures ci-dessus, on a $\vec{B}_R$ perpendiculaire à l'axe $X'X$ du solénoïde. L'aiguille aimantée s'immobilise chaque fois dans la position où son axe $\vec{sn}$ a même direction et même sens que $\vec{B}_R$. L'angle que fait l'aiguille avec le méridien magnétique est β_1 pour une position et β_2 pour l'autre position.

$$\sin \beta_1 = \frac{\|\vec{B}_C\|}{\|\vec{B}_H\|}, \text{ A.N : } \sin \beta_1 = 0,523 \implies \beta_1 = 31,5^\circ$$

$$\sin \theta = \sin (360^\circ - \beta_2) = \frac{\|\vec{B}_C\|}{\|\vec{B}_H\|} = 0,523 \implies \beta_2 = 328,5^\circ$$

Dans les positions finales où l'aiguille est parallèle au plan des spires, elle fait respectivement les angles $\beta_1 = 31,5^\circ$ et $\beta_2 = 328,5^\circ$ avec le méridien magnétique.

3) Nous venons de trouver que dans les positions où l'aiguille est parallèle au plan des spires, on a :

$$\sin \beta_1 = \sin (360^\circ - \beta_2) = \frac{\|\vec{B}_C\|}{\|\vec{B}_H\|} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot i}{\ell \cdot \|\vec{B}_H\|}$$

Le sinus d'un angle étant inférieur ou égal à 1, l'intensité i du courant doit vérifier l'inégalité :

$$i \leq \frac{\ell \cdot \|\vec{B}_H\|}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot N} = 19 \times 10^{-3} \text{ A}$$

Ce résultat signifie que si l'intensité du courant dans la bobine considérée est supérieure à 19 mA, il est impossible d'obtenir une position du solénoïde où son axe horizontal $X'X$ serait perpendiculaire à l'aiguille aimantée.

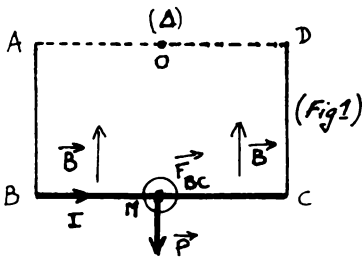
3- FORCE ELECTROMAGNETIQUE DE LAPLACE

Exercice n° 1

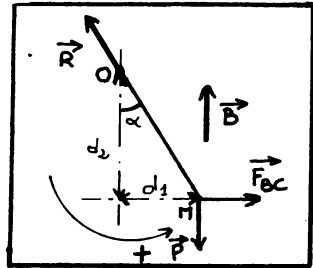
Un conducteur a la forme d'un rectangle incomplet formé de 3 côtés AB, BC et CD; il est capable de tourner autour d'une tige isolante horizontale passant par les points A et D. Le côté BC horizontal parallèle à AD pèse 0,4 N. Les côtés AB et CD initialement verticaux sont de masse négligeable. Le cadre est en cuivre. On fait passer un courant d'intensité I dans le conducteur, dans le sens $\overrightarrow{ABCD}$, et on établit un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical ascendant, valant 0,25 T, l'action de ce champ étant limitée à une longueur de 16 cm ayant pour milieu le milieu de [BC]. Le conducteur tourne autour de AD et s'immobilise dans une position faisant un angle de 39° avec la position d'équilibre initiale.

Donner une explication détaillée de l'expérience décrite et calculer l'intensité I du courant électrique. On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé



(Fig 2)



Considérons le système constitué par le conducteur ABCD. Dans la figure n° 1, on a représenté le cadre à l'instant où il commence son mouvement vers la position d'équilibre finale:

Le cadre est soumis à son poids $\vec{P}$ (appliqué au milieu de [BC] puisque seul le côté BC a une masse non négligeable), et à la force électromagnétique $\vec{F}_{BC}$. Cette force $\vec{F}_{BC}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$ et à BC, elle est orientée vers la gauche d'un observateur parcouru par le courant des pieds vers la tête (de B vers C) et regardant dans le sens de $\vec{B}$. Cela nous donne $\vec{F}_{BC}$ sortante pour le plan de la figure. Cette force de Laplace est appliquée au milieu M de la partie de BC soumise à l'action du champ magnétique, M étant le milieu du côté BC.

Dans la figure n° 2, on a représenté le cadre dans sa position d'équilibre finale, son plan fait un angle α avec le plan vertical.

Le système est soumis à $\vec{F}_{BC}$ (notée $\vec{F}$ par la suite), à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de l'axe (Δ). Ayant choisi un sens arbitraire positif de rotation, nous écrirons que le cadre est

en équilibre si la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation est nulle.

$$\sum M_{\vec{F}_{\text{ext}}} = 0 : M_{\vec{P}} + M_{\vec{R}} + M_{\vec{F}} = 0$$

La droite d'action de $\vec{R}$ coupant l'axe, le moment de $\vec{R}$ est nul et la condition d'équilibre s'écrit:

$$- \|\vec{P}\| \cdot d_1 + \|\vec{F}\| \cdot d_2 = 0$$

$$- \|\vec{P}\| \cdot OM \cdot \sin \alpha + \|\vec{F}\| \cdot OM \cdot \cos \alpha = 0 \quad \text{avec } OM = AB$$

- $\|\vec{P}\| \cdot \sin \alpha + I \cdot \ell \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha = 0$, ℓ étant la longueur de BC soumise à l'action du champ magnétique $\vec{B}$

L'intensité du courant électrique traversant le conducteur est:

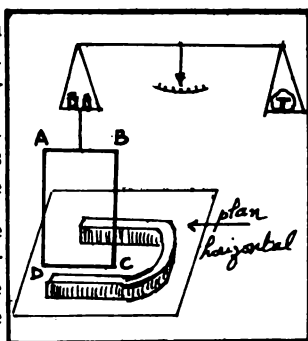
$$I = \frac{\|\vec{P}\| \cdot \sin \alpha}{\ell \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \alpha} = \frac{\|\vec{P}\| \cdot \tan \alpha}{\ell \cdot \|\vec{B}\|}$$

$$\text{A.N: } I = 8,1 \text{ A}$$

Exercice n° 2

On dispose d'un cadre rectangulaire en cuivre. Les côtés AD et BC de ce cadre sont verticaux. Ses côtés AB et CD sont horizontaux et ont chacun 12 cm pour longueur. On attache un fil isolant vertical, d'une part au milieu du côté AB du cadre, et d'autre part, par le bas, au milieu du plateau gauche d'une balance à plateaux suspendus. Le cadre pend ainsi librement. L'équilibre de la balance est réalisé au moyen d'une "tare" dans le plateau de droite et de "masses marquées" dans le plateau de gauche.

On place un aimant en U dans un plan horizontal, soumettant ainsi uniquement tout le côté CD du cadre à un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ horizontal perpendiculaire à CD et valant 0,05 T puis on fait passer un courant électrique d'intensité $I = 10 \text{ A}$ dans le sens ABCDA de manière à n'exercer aucune action mécanique sur le cadre pour y faire passer ce courant. On s'aperçoit que l'équilibre de la balance est rompu et que, pour le rétablir, il faut ajouter des masses marquées de valeur " m " dans le plateau de gauche.



Expliquer l'expérience, préciser les pôles N et S de l'aimant en U et calculer la valeur de " m " ajoutée dans le plateau de gauche pour rétablir l'équilibre.

On prendra $\|\vec{g}\| = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ et on négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

Avant le passage du courant dans le cadre, ce dernier n'est soumis de la part de l'aimant à aucune force magnétique puisque

ce cadre est en cuivre, métal non ferromagnétique. Lorsque le courant passe dans le cadre, on s'aperçoit qu'il faut ajouter des masses marquées dans le plateau de gauche, donc ce cadre a été soumis à une force électromagnétique verticale orientée vers le haut.

Cette force a agi sur le côté CD, les 3 autres côtés étant en dehors de l'entrefer de l'aimant en U.

Le fil isolant de suspension étant attaché aux milieux du plateau de gauche et du côté CD, la force électromagnétique agissant sur CD est directement opposée au poids des solides "marqués" qu'on a ajoutés dans le plateau de gauche.

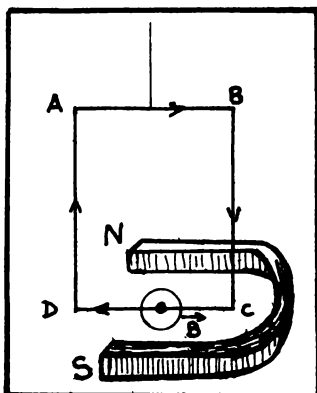
Désignons par $\vec{F}$ la force de Laplace agissant sur CD et $\vec{P}$ le poids des solides "marqués" ajoutés, la somme des moments de ces deux forces par rapport à l'axe de rotation du fléau est nulle, elles ont la même droite d'action donc elles ont la même valeur.

Un observateur placé contre CD, traversé par le courant des pieds vers la tête, de C vers D et regardant dans le sens de $\vec{B}$, a son bras gauche tendu vers le haut. Cela impose le sens sortant du plan de la figure pour le vecteur $\vec{B}$. On sait que dans l'entrefer d'un aimant en U, le champ est orienté du pôle nord vers le pôle sud, donc le pôle nord est en arrière du plan de la figure et le pôle sud est en avant du plan de la figure.

Calculons la masse "m" des solides ajoutés dans le plateau:

$$\|\vec{P}\| = m \cdot \|\vec{g}\| = \|\vec{F}\| = I \cdot CD \cdot \|\vec{B}\| \implies m = \frac{I \cdot CD \cdot \|\vec{B}\|}{\|\vec{g}\|}$$

A.N: $m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg.}$



Exercice n° 3

Une tige rectiligne homogène OA en aluminium, de longueur $\ell_1 = 30 \text{ cm}$, pesant $0,2 \text{ N}$, est capable de tourner autour d'un axe horizontal passant par son extrémité supérieure O. Elle trempe très légèrement en A dans le mercure contenu dans une cuve. La tige est parcourue par un courant ascendant d'intensité $I = 12 \text{ A}$ et elle est soumise à un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan vertical dans lequel elle peut se mouvoir. La tige tourne alors et s'immobilise dans une position faisant un angle $\alpha = 18^\circ$ avec la verticale. Dans cette position finale, l'action du champ magnétique s'exerce sur une longueur $\ell = 5 \text{ cm}$ de la tige comprise entre les points situés respectivement à 20 cm et 25 cm de O.

- 1) Faire un schéma très clair représentant la tige dans sa

position finale avec le sens du courant, le vecteur $\vec{B}$ et les forces agissantes.

2) Calculer la valeur du champ $\vec{B}$.

N.B: On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

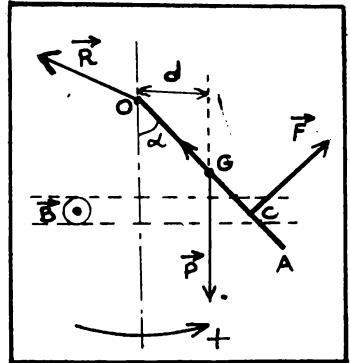
1) La tige d'aluminium, parcourue par le courant électrique, est soumise à l'action du champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan où cette tige peut se mouvoir. La tige subit alors une force électromagnétique (force de Laplace) ayant les caractéristiques suivantes :

- direction : perpendiculaire au plan contenant la tige et $\vec{B}$
- sens : vers la gauche d'un observateur parcouru par le courant des pieds vers la tête et regardant dans le sens de $\vec{B}$,
- point d'application : le milieu de la partie de la tige située dans le champ,

- valeur : $\|\vec{F}\| = I \cdot \ell \cdot \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{I}, \vec{B}}) = I \cdot \ell \cdot \|\vec{B}\|$, ℓ étant la longueur de la tige située dans le champ magnétique.

La tige est aussi soumise à son poids $\vec{P}$ appliqué en son milieu G et à la réaction $\vec{R}$ de l'axe. Représentons la tige dans sa position d'équilibre (figure ci-contre).

L'observateur d'Ampère doit regarder vers l'avant de la figure pour qu'il ait $\vec{F}$ vers sa gauche quand le courant le traverse des pieds vers la tête : $\vec{B}$ est sortant. $\vec{F}$ est perpendiculaire à OA et au vecteur $\vec{B}$.



2) Ecrivons la condition d'équilibre pour la tige dans sa position finale: La somme des moments, par rapport à l'axe de rotation horizontal passant par O, des forces extérieures est nulle. Choisissons un sens positif de rotation.

$$M_{\vec{P}} + M_{\vec{R}} + M_{\vec{F}} = 0$$

Le moment de la réaction de l'axe est nul puisque la droite d'action de cette force coupe l'axe. La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$\|\vec{F}\| \cdot OC - \|\vec{P}\| \cdot d = 0$$

$$I \cdot \ell \cdot \|\vec{B}\| \cdot OC - \|\vec{P}\| \cdot \frac{\ell_1}{2} \cdot \sin \alpha = 0$$

Le champ magnétique a pour valeur : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{P}\| \cdot \ell_1 \cdot \sin \alpha}{2 I \cdot \ell \cdot OC}$

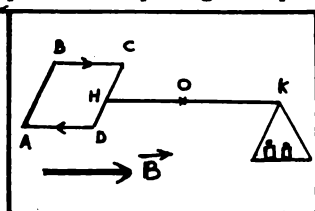
A.N : $\|\vec{B}\| = 6,87 \times 10^{-2} \text{ T}$

Exercice n° 4

Un cadre carré ABCD, formé de $N = 20$ spires de côté moyen a ($a = 4 \text{ cm}$), est parcouru par un courant d'intensité $I = 6 \text{ A}$ dans le sens ABCDA. Il est disposé horizontalement à l'extrémité H d'une tige HK mobile autour d'un axe horizontal passant par son milieu O, H étant au milieu du côté CD; les distances OH et OK sont toutes deux égales à $0,1 \text{ m}$. A l'autre extrémité (K) de la tige, on suspend un plateau dans lequel on peut placer des "masses marquées".

Le dispositif étant en équilibre avec la tige HK horizontale, on place la totalité du cadre dans un espace champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ ayant la direction et le sens de $\vec{AD}$, et valant $0,05 \text{ tesla}$.

1) Faut-il, pour maintenir la tige HK en position horizontale, ajouter ou enlever des "masses marquées" dans le plateau ? Calculer la valeur m des "masses marquées" à ajouter ou à enlever.



2) Expliquer brièvement comment le dispositif étudié peut servir pour la mesure des valeurs $\|\vec{B}\|$ des champs magnétiques uniformes.

Corrigé

1) Avant de placer le cadre carré dans le champ magnétique, on a un équilibre du dispositif grâce au poids du plateau et des solides "marqués" d'un côté et au poids du cadre de l'autre côté.

Lorsque le champ magnétique est produit autour du cadre parcouru par le courant, les côtés AD et BC parallèles à $\vec{B}$ ne subissent aucune action.

Par contre, les côtés CD et AB perpendiculaires à $\vec{B}$ subissent les forces électromagnétiques $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ de valeurs:

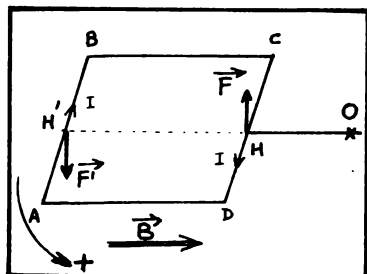
$$\|\vec{F}\| = N \cdot I \cdot \|\vec{B}\| \cdot CD \quad \text{et} \quad \|\vec{F}'\| = N \cdot I \cdot \|\vec{B}\| \cdot AB. \quad \text{Puisque } CD = AB, \text{ alors}$$

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}'\|; \quad \text{Ces deux forces de Laplace sont perpendiculaires}$$

au vecteur champ $\vec{B}$ et aux côtés considérés. Chacune d'elles est orientée vers la gauche d'un observateur qui, placé contre le côté considéré, parcouru par le courant des pieds vers la tête, regarde dans le sens de $\vec{B}$. Nous trouvons ainsi que $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ constituent un couple de forces faisant tourner le dispositif dans le sens positif choisi autour de l'axe horizontal passant par O : En effet $M_{\vec{F}} = \|\vec{F}'\| \cdot OH'$ et $M_{\vec{F}'} = -\|\vec{F}\| \cdot OH$; or $OH' > OH$

donc $M_{\vec{F}} > |M_{\vec{F}'}| \Rightarrow$ Le dispositif tend à tourner dans le sens imposé par $\vec{F}$.

Le dispositif était en équilibre en l'absence de $\vec{B}$; pour conti-



nuer à avoir l'équilibre en présence de ce champ, il faut ajouter une "masse marquée" dans le plateau pour que l'effet du poids du solide placé compense l'effet du couple ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) :

$$\|\vec{F}'\| \cdot H'O - \|\vec{F}\| \cdot HO - m \cdot \|\vec{g}\| \cdot OK = 0 \quad (1) \Rightarrow$$

$$\|\vec{F}'\| \cdot HH' - m \cdot \|\vec{g}\| \cdot OK = 0, \text{ avec } \|\vec{F}\| = N \cdot I \cdot a \cdot \|\vec{B}\|$$

$$D'où : N \cdot I \cdot a \cdot \|\vec{B}\| \cdot HH' - m \cdot \|\vec{g}\| \cdot OK = 0 \quad (2)$$

La masse du solide "marqué" qu'on doit placer dans le plateau pour rétablir l'équilibre est :

$$m = \frac{N \cdot I \cdot a \cdot \|\vec{B}\| \cdot a}{\|\vec{g}\| \cdot OK} = \frac{N \cdot I \cdot a^2 \cdot \|\vec{B}\|}{\|\vec{g}\| \cdot OK}$$

$$A.N : \quad m = 9,6 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

2) Nous déduisons de ce qui précède un moyen simple pour mesurer la valeur d'un champ magnétique uniforme :

* Nous faisons passer un courant dans le cadre carré et nous mesurons l'intensité I de ce courant grâce à un ampèremètre placé en série avec ce cadre.

* Nous réalisons l'équilibre du dispositif, en l'absence de champ magnétique (à part le champ magnétique terrestre dont l'effet est négligeable), en plaçant des "masses marquées" de valeur m_0 dans le plateau.

* Nous produisons le champ magnétique uniforme dont nous voulons mesurer la valeur, dans l'espace entourant le cadre, de manière que $\vec{B}$ soit parallèle aux côtés BC et AD. L'équilibre est alors rompu à cause du couple ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) agissant sur les côtés AB et CD. Suivant le sens de $\vec{B}$, l'équilibre est rétabli en ajoutant ou en enlevant une "masse marquée" dans le plateau. Nous avons alors :

$$\|\vec{B}\| = \frac{m \cdot \|\vec{g}\| \cdot OK}{N \cdot I \cdot a^2} \quad (m \text{ étant la masse ajoutée ou enlevée}).$$

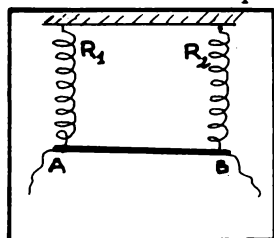
Le dispositif constitue une " BALANCE ELECTROMAGNETIQUE ".

Exercice n° 5

Une tige AB en cuivre, homogène, de section constante, pèse 1 N. Elle est en équilibre en position horizontale au bout de deux ressorts à axes verticaux R_1 et R_2 identiques de longueurs initiales $l_{01} = l_{02} = l_0 = 15 \text{ cm}$ et de constantes de raideur $K_1 = K_2 = K = 5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, auxquels la tige est attachée en A et B par des contacts isolants.

On fait passer un courant continu d'intensité $I = 25 \text{ A}$ dans la tige AB dans le sens $A \rightarrow B$, par l'intermédiaire de fils souples conducteurs ne gênant nullement le mouvement possible de la tige au bout des deux ressorts. On soumet ensuite la tige à

un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal perpendiculaire à la tige et agissant sur une partie médiane de



la tige, longue de $a = 8 \text{ cm}$. Le champ $\vec{B}$ vaut $0,1 \text{ T}$. Dans une première expérience, $\vec{B}$ est rentrant pour le plan de la figure; dans une deuxième expérience, $\vec{B}$ est sortant de ce plan.

Déterminer la longueur des ressorts dans chacune des deux expériences avec un schéma très clair à l'appui. On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

Représentons le dispositif en équilibre dans les trois situations :

- * en l'absence de champ magnétique (fig1)
- * en présence d'un champ magnétique rentrant pour le plan de la figure (fig2)
- * en présence d'un champ magnétique sortant du plan de la figure (fig3)

Ecrivons pour chaque cas la double condition d'équilibre:

* Translation rectiligne évitée :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{Cette relation vectorielle sera projetée sur } (0, \vec{j})$$

* Rotation autour d'un axe qui passerait par le centre de masse G de la tige, évitée:

$$\text{GA. } \|\vec{T}_1\| = \text{GB. } \|\vec{T}_2\|$$

Dans les trois cas on aura $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = K \cdot \Delta l$

a) En l'absence de champ magnétique :

$$\|\vec{P}\| - \|\vec{T}_1\| - \|\vec{T}_2\| = 0$$

$$\text{d'où : } \|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = \frac{\|\vec{P}\|}{2} = K \cdot \Delta l$$

L'allongement des ressorts est alors :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{\|\vec{P}\|}{2K} = 0,1 \text{ m}$$

La longueur des ressorts est : $l_1 = l_2 = l_0 + \Delta l_1 = 0,25 \text{ m}$.

b) En présence de $\vec{B}$ rentrant, la tige AB est soumise à la force électromagnétique $\vec{F}_1$ verticale orientée vers le haut et ayant la valeur $\|\vec{F}_1\| = I \cdot a \cdot \|\vec{B}\|$ (a = longueur soumise au champ).

$$\|\vec{P}\| - \|\vec{T}_1'\| - \|\vec{T}_2'\| - \|\vec{F}_1\| = 0 \quad \text{d'où } \|\vec{T}_1'\| = \|\vec{T}_2'\| = \frac{\|\vec{P}\| - I a \|\vec{B}\|}{2}$$

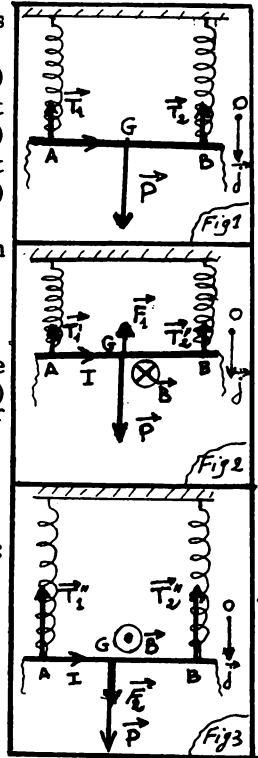
Les deux ressorts sont alors allongés de $\Delta l_1' = \Delta l_2' = \frac{\|\vec{P}\| - I a \|\vec{B}\|}{2K}$

Numériquement $\Delta l_1' = \Delta l_2' = 0,08 \text{ m}$ et la longueur des ressorts est égale à $l_1' = l_2' = 0,23 \text{ m}$

c) En présence de $\vec{B}$ sortant, la tige AB subit la force électromagnétique $\vec{F}_2$ verticale orientée vers le bas, de valeur $\|\vec{F}_2\| = I a \|\vec{B}\|$

$$\|\vec{P}\| + \|\vec{F}_2\| - \|\vec{T}_1''\| - \|\vec{T}_2''\| = 0 \quad \text{d'où } \|\vec{T}_1''\| = \|\vec{T}_2''\| = \frac{\|\vec{P}\| + I a \|\vec{B}\|}{2}$$

La suite du calcul, analogue au " b) ", donne comme résultat final, une longueur de $0,27 \text{ m}$ pour chacun des deux ressorts.



4- FLUX MAGNETIQUE

Exercice n° 1

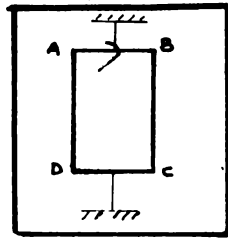
Un cadre rectangulaire ABCD est formé de $N = 20$ spires en fil de cuivre. Les dimensions moyennes du cadre sont: $AB = CD = 8 \text{ cm}$ et $BC = AD = 12 \text{ cm}$. Sur ce cadre, on a choisi le sens arbitraire positif $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$.

1) Représenter ce cadre vu de face; déterminer et représenter le vecteur surface $\vec{S}$.

2) Calculer la valeur algébrique du flux magnétique traversant le cadre quand on le place dans un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ valant $0,1 \text{ T}$, dans les cas suivants :

- $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de même sens,
- $\vec{B}$ fait un angle de 30° avec $\vec{S}$,
- $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de sens contraires.

3) Le cadre ABCD est suspendu verticalement, aux milieux de AB et CD horizontaux, grâce à deux fils verticaux sans torsion, comme l'indique la figure ci-contre. Le cadre occupe la position définie au " 2) c) ", c-à-d $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de sens contraires. On produit alors dans le cadre un courant électrique continu dont l'intensité a pour valeur algébrique $i = + 5 \text{ A}$.

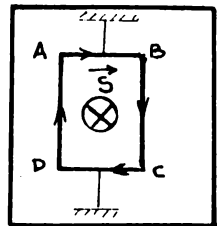


Montrer que le cadre effectue une rotation. Représenter sur deux schémas très soignés le cadre vu de face avec le sens arbitraire, le sens réel du courant, le vecteur $\vec{S}$ et le vecteur $\vec{B}$ dans la position initiale et la position finale. Calculer le travail des forces électromagnétiques au cours de cette rotation. On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

Le vecteur surface $\vec{S}$ est perpendiculaire au plan du cadre. Le sens de ce vecteur est vers la gauche d'un observateur qui, placé contre un côté du cadre et regardant vers l'intérieur de ce cadre, est traversé des pieds vers la tête par la flèche indiquant le sens positif arbitraire choisi. Dans le cas du cadre représenté sur la figure ci-contre, le vecteur surface est rentrant pour le plan de la figure.

La norme de $\vec{S}$ est $\|\vec{S}\| = S = AB \cdot BC = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$



2) Le flux magnétique traversant le cadre est :

$$\Phi = N \cdot \vec{S} \cdot \vec{B} = N \cdot S \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{S}, \vec{B})$$

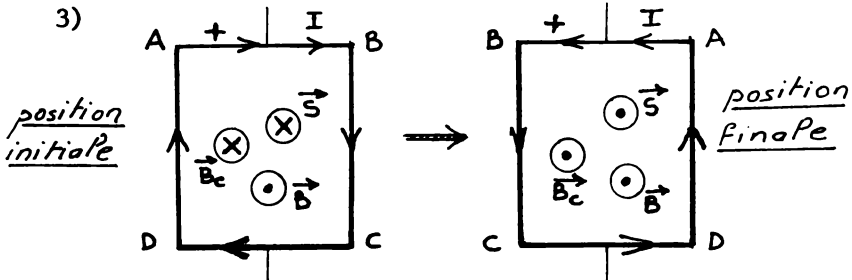
a) $\vec{B}$ et $\vec{S}$ colinéaires et de même sens:

$$\theta_1 = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = 1,92 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

(Wb est l'abréviation de weber)

b) L'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$ est égal à 30°
 $\theta_2 = 30^\circ \Rightarrow \cos \theta_2 = 0,866 \Rightarrow \Phi_2 = 1,66 \times 10^{-2} \text{ Wb}$

c) $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de sens contraires :
 $\theta_3 = 180^\circ \Rightarrow \cos \theta_3 = -1 \Rightarrow \Phi_3 = -1,92 \times 10^{-2} \text{ Wb}$



Dans sa position initiale, en l'absence de courant, le cadre est traversé par un flux magnétique de valeur algébrique négative; lorsqu'on fait passer un courant électrique d'intensité $i = + 5 \text{ A}$ dans ce cadre, le champ magnétique créé par ce courant produit à travers la surface des spires rectangulaires un flux " propre ", grâce à $\vec{B}_c$ orienté de la face sud de ce cadre à sa face nord. Ce flux propre étant positif, alors que le flux de $\vec{B}$ est négatif, le cadre n'est pas traversé par un flux extrêmu (de valeur absolue maximale), il n'est donc pas en position d'équilibre stable. Les forces électromagnétiques exercées par les champs magnétiques sur les côtés parcourus par le courant font alors tourner le cadre jusqu'à la position d'équilibre stable pour laquelle $\vec{B}$ et $\vec{B}_c$ sont tous deux perpendiculaires à la surface du cadre tout en ayant le même sens. Il résulte de cela que le cadre effectue un demi-tour et tourne de 180° . Calculons le travail des forces électromagnétiques au cours de cette rotation. Pour cela, utilisons la loi de Maxwell

$$W = i (\Phi_{\text{final}} - \Phi_{\text{initial}}) \quad \text{avec } i = I = + 5 \text{ A},$$

$$\Phi_{\text{final}} = \Phi_{\text{propre}} + N \cdot S \cdot \|\vec{B}\| \cos 0^\circ \quad \text{et}$$

$$\Phi_{\text{initial}} = \Phi_{\text{propre}} + N \cdot S \cdot \|\vec{B}\| \cos 180^\circ$$

$$W = I \cdot N \cdot S \cdot \|\vec{B}\| (\cos 0^\circ - \cos 180^\circ) = 2 I \cdot N \cdot S \cdot \|\vec{B}\|$$

$$\text{A.N :} \quad W = 0,192 \text{ J}$$

Exercice n° 2

Deux tiges conductrices OA et OB perpendiculaires fixes forment un plan horizontal traversé par les lignes d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orienté vers le haut et valant $0,2 \text{ T}$. Une troisième tige conductrice CD est capable de se déplacer en

gardant à chaque instant deux points de contact M et N avec OA et OB (respectivement). On a ainsi, à tout instant, un cadre conducteur en forme de triangle rectangle isocèle. On a initialement $OM = ON = 5 \text{ cm}$. On produit un courant électrique continu d'intensité $I = 15 \text{ A}$ dans le cadre OMN, le sens du courant étant tel que la force de Laplace éloigne la troisième tige de O.

1) Déterminer avec justification le sens du courant.

2) Calculer le travail de la force électromagnétique agissant sur la troisième tige au cours d'un mouvement dans lequel M et N se déplacent chacun de 20 cm:

a) en appliquant la loi de Maxwell,

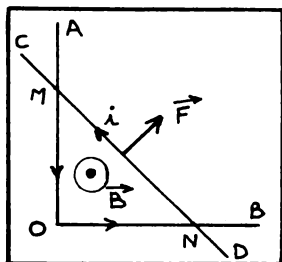
b) en considérant comme force électromagnétique la moyenne des forces que subit la troisième tige respectivement au début et à la fin du déplacement considéré.

On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

1) Représentons, vu de dessus, le plan horizontal contenant les 3 tiges. Le vecteur champ $\vec{B}$ étant vertical et orienté vers le haut, il est sortant pour un observateur qui regarde de dessus la surface du cadre.

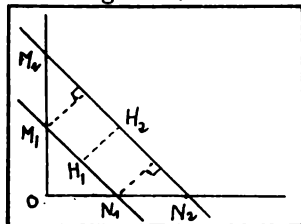
Le courant électrique qui, passant dans le cadre triangulaire, entraîne l'éloignement de la tige MN de O a un sens tel que la



force électromagnétique $\vec{F}$ exercée par le champ $\vec{B}$ sur la tige MN a le sens indiqué sur la figure. Un observateur d'Ampère placé contre MN, regardant dans le sens de $\vec{B}$, a cette force vers sa gauche si le courant le traverse des pieds vers la tête. Il en résulte que le courant est de N vers M dans la tige MN.

2) Orientons le triangle OMN de manière que le flux de $\vec{B}$ soit positif :

$\vec{B}$ et le vecteur surface $\vec{S}$ doivent être de même sens. Le sens de $\vec{S}$, sortant pour le plan de la figure, détermine le sens positif arbitraire : un observateur traversé des pieds vers la tête par la flèche indiquant le sens positif



et regardant l'intérieur du cadre triangulaire voit $\vec{S}$ vers sa gauche. L'utilisation d'une figurine donne immédiatement le positif $O \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow O$.

Calculons le travail de la force électromagnétique $\vec{F}$ au cours d'un déplacement où la valeur de OM et de ON passe de 5 cm à 25 cm.

a) Appliquons la loi de Maxwell : $W = i (\phi_2 - \phi_1)$

La valeur algébrique de l'intensité du courant est $i = I > 0$ puisque le courant est de N vers M (sens +), d'où :

$$W = I (\phi_2 - \phi_1)$$

$$\phi_1 = \|\vec{B}\| \frac{\vec{OM}_1 \cdot \vec{ON}_1}{2} = \|\vec{B}\| \frac{OM_1^2}{2} \quad \text{car} \quad OM_1 = ON_1 = 5 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

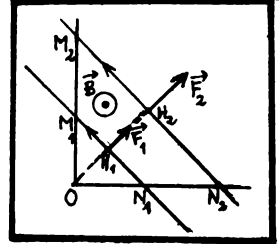
$$\phi_2 = \|\vec{B}\| \frac{OM_2 \cdot ON_2}{2} = \|\vec{B}\| \frac{OM_2^2}{2} \quad \text{car } OM_2 = ON_2 = 25 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

$$W = I \cdot \|\vec{B}\| \cdot \frac{1}{2} (OM_2^2 - OM_1^2) = 9 \times 10^{-2} \text{ J}$$

b) Essayons de retrouver le travail précédent autrement en considérant la valeur moyenne de la force électromagnétique.

Dans la position initiale, la longueur de la tige mobile soumise à l'action du champ $\vec{B}$ est $M_1 N_1 = OM_1 \sqrt{2}$, la force électromagnétique a alors la valeur :

$$\|\vec{F}_1\| = I \cdot M_1 N_1 \cdot \|\vec{B}\| = I \cdot OM_1 \cdot \sqrt{2} \|\vec{B}\|$$



Dans la position finale, la longueur de la tige mobile soumise à l'action de $\vec{B}$ est $M_2 N_2 = OM_2 \sqrt{2}$ et la force électromagnétique vaut : $\|\vec{F}_2\| = I \cdot M_2 N_2 \cdot \|\vec{B}\| = I \cdot OM_2 \cdot \sqrt{2} \|\vec{B}\|$

Le déplacement du point d'application de $\vec{F}$ est : $H_1 H_2 = \frac{M_1 M_2}{\sqrt{2}}$

La valeur moyenne de la force électromagnétique est :

$$\|\vec{F}_{\text{moy}}\| = I \cdot \|\vec{B}\| \cdot \frac{OM_1 + OM_2}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$W = \|\vec{F}_{\text{moy}}\| \cdot H_1 H_2 = I \cdot \|\vec{B}\| \cdot \frac{OM_1 + OM_2}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{\sqrt{2}}$$

$$W = I \cdot \|\vec{B}\| \cdot \frac{(OM_2 + OM_1)(OM_2 - OM_1)}{2} = I \cdot \|\vec{B}\| \frac{1}{2} (OM_2^2 - OM_1^2)$$

On retrouve l'expression obtenue par l'application de la loi de Maxwell. Cet exercice constitue une bonne vérification de cette loi qui a été établie dans le cours à partir d'un exemple de calcul de travail de la force de Laplace dans un cas très simple puis généralisée sans démonstration.

COMMENTAIRE :

Nous aurions pu prendre le sens positif $O \rightarrow M \rightarrow N$ sur le cadre triangulaire, cela aurait donné un vecteur $\vec{S}$ rentrant pour le plan de la figure et un flux de B négatif " ($\vec{B}, \vec{S}$) = 180° ". Le courant qui passe dans le circuit OMN a toujours le sens $O \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow O$ pour que la force de Laplace agisse sur la tige MN en l'éloignant de O . Ainsi l'intensité du courant est négative $i = -I = -15 \text{ A}$. De cette façon, la variation de flux a le signe contraire de celui qu'elle avait avec le choix précédent et la valeur algébrique de l'intensité du courant a aussi le signe contraire de celui qu'elle avait avec le choix précédent: on retrouve donc le même travail positif de la force électromagnétique.

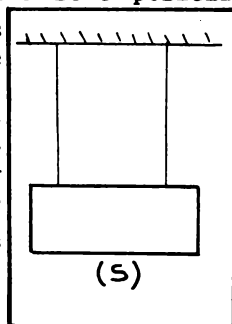
Exercice n° 3

Un solénoïde (S) comporte $N = 1000$ spires de diamètre $D = 6$ cm réparties régulièrement sur une longueur $\ell = 30$ cm. On suppose que cette bobine est très longue. On oriente les spires de manière que le " flux propre " de cette bobine soit positif.

Le solénoïde est suspendu au bout de deux fils verticaux très souples sans torsion, son axe étant alors horizontal (voir figure).

On fait passer dans ce solénoïde un courant électrique continu d'intensité $i = + 5$ A, puis on produit brusquement dans l'espace enveloppant le solénoïde un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}'$ horizontal colinéaire et de sens contraire à $\vec{B}_C$ créé par le courant dans (S).

La valeur de $\vec{B}'$ est égale à 10^{-2} tesla.



1) Calculer le flux magnétique traversant (S) avant la production du champ magnétique $\vec{B}'$.

2) Calculer le flux magnétique traversant (S) juste à l'instant où le champ $\vec{B}'$ est produit.

3) Est-ce que le solénoïde (S) reste immobile ou effectue un mouvement lorsque $\vec{B}'$ est produit ? Dans le cas où il y a mouvement, calculer le travail des forces électromagnétiques.

On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

1) Orientons les spires de (S) de manière que l'intensité du courant soit positive (sens du courant confondu avec le sens positif). Avant la production du champ $\vec{B}'$, les spires de (S) sont traversées par un flux magnétique " propre ", c'est le flux de $\vec{B}_C$ créé par le courant qui passe dans (S).

$$\Phi_1 = N \cdot S \cdot \|\vec{B}_C\| = N \cdot \pi \frac{D^2}{4} 4\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} I = 10^{-7} \cdot \pi^2 \cdot N^2 \cdot \frac{D^2}{\ell} \cdot I$$

$$A.N : \quad \Phi_1 = 5,9 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

2) Juste à l'instant où on produit le champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}'$ colinéaire et de sens contraire à $\vec{B}_C$, le flux qui traverse les spires de (S) est :

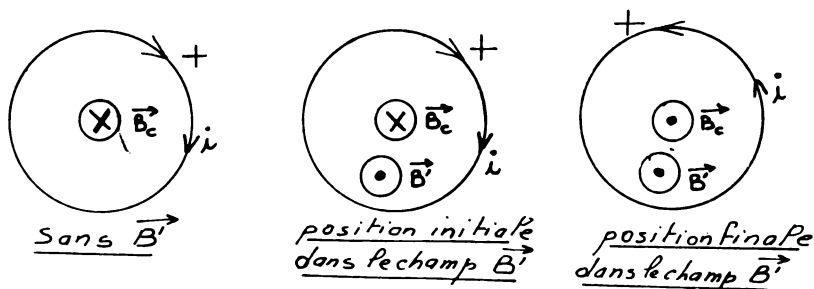
$$\Phi_2 = N \cdot S \cdot \|\vec{B}_C\| \cdot \cos 0^\circ + N \cdot S \cdot \|\vec{B}'\| \cdot \cos 180^\circ \quad \text{avec} \quad S = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\Phi_2 = N \cdot S \cdot (4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} \cdot I - \|\vec{B}'\|)$$

$$A.N : \quad \Phi_2 = 3,08 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

3) Pour savoir si (S) reste immobile ou se met en mouvement lorsqu'on produit le champ $\vec{B}'$, nous devons déterminer si le flux magnétique est extréum dans (S), c-à-d si la valeur absolue du flux est maximale dans les spires. Si c'est ainsi, le solénoïde est en équilibre stable.

Une telle position d'équilibre stable correspond donc à $\vec{B}'$ et $\vec{B}_C$ colinéaires et de même sens. Or, à l'instant où on produit le champ $\vec{B}'$, ce champ est de sens contraire à $\vec{B}_C$. Le solénoïde effectue donc une rotation de 180° (un demi-tour) pour parvenir à la position d'équilibre stable.



Le flux à travers les spires de (S) dans la position finale d'équilibre stable est :

$$\Phi_3 = N S \parallel \vec{B}_C \parallel \cos 0^\circ + N S \parallel \vec{B}' \parallel \cos 0^\circ$$

Le travail des forces électromagnétiques au cours de cette rotation est, conformément à la loi de Maxwell, donné par la relation :

$$W = i (\Phi_3 - \Phi_2) = i N S \parallel \vec{B}' \parallel (\cos 0^\circ - \cos 180^\circ) \text{ avec } i = I$$

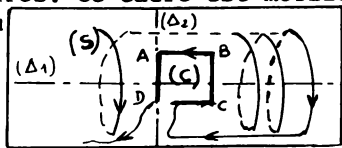
d'où : $W = 2 I N S \parallel \vec{B}' \parallel$ A.N : $W = 0,283 \text{ J}$

COMMENTAIRE :

Nous avons choisi le sens positif sur les spires de manière que i soit positive, la position d'équilibre stable est alors celle où le flux traversant (S) est maximal en valeur algébrique. Ce choix est très fréquent dans les livres de cours et on parle alors de " règle de flux maximal ". Si nous avions orienté les spires autrement, et nous en avons le droit, on aurait eu une position d'équilibre stable où le flux de $\vec{B}'$ et le flux propre sont tous deux négatifs ; le flux total serait minimal algébriquement : La règle générale indépendante du sens positif choisi est donc que le flux est extrémum (maximal en valeur absolue) en position d'équilibre stable pour tout circuit parcouru par un courant et capable de se mouvoir dans un champ magnétique.

Exercice n° 4

Un solénoïde (S) comporte $N_1 = 2000$ spires réparties régulièrement sur une longueur $\ell = 50 \text{ cm}$. Son axe (Δ_1) est horizontal. Dans la zone centrale de (S), on dispose d'un cadre carré (C) de côté $a = 3 \text{ cm}$, formé de $N_2 = 15$ spires. Ce cadre est mobile autour d'un axe (Δ_2) vertical confondu avec un côté du cadre, le plan moyen de ce cadre étant vertical et contenant l'axe (Δ_1). Le solénoïde (S) et

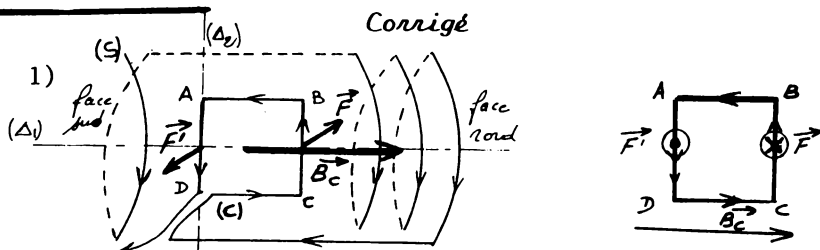


le cadre (C) sont montés en série. On fait passer dans (S) et (C) un courant continu d'intensité $I = 15 \text{ A}$.

1) Montrer que dans les conditions décrites dans ce qui précède, le cadre (C) se trouve soumis à un couple de forces électromagnétiques. Calculer le moment de ce couple.

2) Quelle position occupera le cadre (C) à l'équilibre ? Calculer le travail du couple de forces électromagnétiques dans la rotation effectuée.

On négligera l'action du champ magnétique terrestre.



Le courant électrique passant dans le solénoïde (S) crée à l'intérieur de (S) un champ uniforme $\vec{B}_C$ parallèle à l'axe (Δ_1) et orienté de la face sud de (S) vers sa face nord (figure ci-dessus). Ce champ $\vec{B}_C$ agit sur le cadre (C) parcouru par le courant :

- * Les côtés AB et CD sont parallèles à $\vec{B}_C$ et ne subissent par conséquent aucune action mécanique de la part de ce champ magnétique.

** Les côtés AD et BC perpendiculaires à $\vec{B}_C$ subissent respectivement les forces électromagnétiques $\vec{F}'$ et $\vec{F}$:

-. $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont perpendiculaires à $\vec{B}_C$ et respectivement aux côtés BC et AD ; elles sont donc perpendiculaires au plan de la figure.

-. Le sens de $\vec{F}$ et celui de $\vec{F}'$ sont obtenus grâce à un observateur qui, placé contre le côté AD ou BC de façon que le courant le traverse des pieds vers la tête, et regardant dans le sens de $\vec{B}_C$, indique par son bras gauche tendu le sens de $\vec{F}$ ou de $\vec{F}'$.

-. La valeur commune de $\vec{F}$ et de $\vec{F}'$ est :

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}'\| = N_2 \cdot I \cdot a \cdot \|\vec{B}_C\|$$

$\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont parallèles, de sens contraires et de même valeur, elles constituent un couple de forces.

A l'instant initial où le plan moyen du cadre carré est parallèle à (Δ_1), le moment du couple ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) est : $M = \|\vec{F}\| \cdot a$

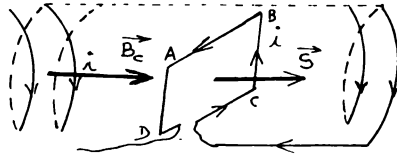
$$M = N_2 \cdot I \cdot a \cdot 4 \pi 10^{-7} \cdot \frac{N_1}{l} \cdot I \cdot a = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{I^2 \cdot a^2}{l}$$

$$\text{A.N : } M = 1,53 \times 10^{-2} \text{ N.m}$$

2) Dans la position précédente où le plan du cadre carré

contient l'axe (Δ_1), ce cadre est traversé uniquement par son flux propre, le flux du champ $\vec{B}_C$ créé par le courant de (S) étant alors nul à travers les spires du cadre carré (C). Ce n'est donc pas une position d'équilibre stable pour (C) puisque la valeur absolue du flux magnétique qui le traverse n'est pas maximale : le cadre (C) effectue un quart de tour pour occuper la position où $\vec{B}_C$ le traverse de sa face sud vers sa face nord; le plan des spires de (C) devient perpendiculaire à l'axe (Δ_1).

.-. Choisissons un sens arbitraire positif sur le cadre carré de manière que l'intensité du courant soit positive. Le dispositif en position d'équilibre est alors représenté par le schéma suivant :



Le travail des forces électromagnétiques au cours de la rotation effectuée par (C) est donné par la loi de Maxwell :

$$W = i \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \quad \text{avec } i = I$$

$$\Phi_2 = + N_2 a^2 \cdot \|\vec{B}_C\| + \text{propre de (C)}$$

$$\Phi_1 = 0 + \text{propre de (C)}$$

$$W = I \cdot N_2 a^2 \cdot \|\vec{B}_C\| = I \cdot N_2 a^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N_1}{l} \cdot I = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N_1 N_2 a^2 I^2}{l}$$

$$\text{A.N : } W = 1,53 \times 10^{-2} \text{ J}$$

W est positif : le travail considéré est moteur.

COMMENTAIRE :

Nous aurions pu orienter le cadre (C) avec comme sens positif $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, nous aurions eu alors : $i = -I$,

$$\Phi_2 = - N_2 a^2 \cdot \|\vec{B}_C\| + \text{flux propre de (C)}$$

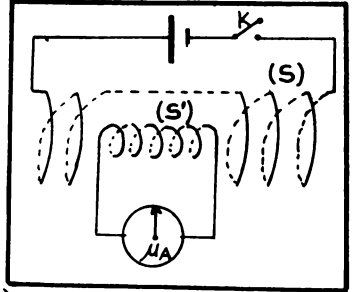
$$\Phi_1 = 0 + \text{flux propre de (C)}$$

Nous retrouvons la même expression et la même valeur algébrique du travail moteur du couple ($\vec{F}, \vec{F}'$).

5- INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

Exercice n° 1

Un solénoïde (S) comporte $N_1 = 1000$ spires uniformément réparties en une seule couche sur une longueur $l_1 = 0,25$ m. Le diamètre du fil qui forme (S) est $d = 0,4$ mm et le diamètre d'une spire est $D_1 = 6$ cm. On réalise un circuit en mettant (S) en série avec un générateur de tension de f.é.m E égale à 12 V et un interrupteur K . Dans la zone centrale de (S), on place un solénoïde (S') constitué par $N_2 = 50$ spires faites du même fil de cuivre que (S), le diamètre d'une spire étant $D_2 = 3$ cm. Aux bornes de (S'), on branche un microampèremètre à zéro central, de résistance $r = 200 \Omega$. (voir figure)



1) On ferme K : un courant s'établit dans (S), l'intensité passe de 0 à une valeur i_1 (qu'on calculera) pendant une durée $\Delta t_1 = 0,05$ s. On constate que pendant cet intervalle de temps Δt_1 , le microampèremètre indique le passage d'un courant

Reproduire le schéma qui accompagne cet énoncé en y plaçant le sens du courant dans (S) et le sens du courant dans (S'). Justifier le sens du courant dans (S'). Calculer la f.é.m induite moyenne dans (S'). Calculer la quantité d'électricité qui traverse (S') pendant la durée Δt_1 . Cette quantité d'électricité dépend-elle de la valeur de Δt_1 ?

2) K reste fermé et le courant dans (S) garde l'intensité I_1 pendant $\Delta t_2 = 15$ minutes. Qu'indique le microampèremètre pendant cet intervalle de temps ?

3) On ouvre l'interrupteur K . L'intensité du courant passe de i_1 à 0 pendant une durée $\Delta t_3 = 0,02$ s. Reprendre la première question dans tous ses détails pour cette étape de l'expérience.

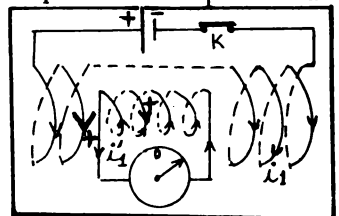
On donne : Résistivité du cuivre : $\rho = 1,6 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$

On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

1) Pendant l'intervalle de temps Δt_1 , l'intensité du courant dans (S) passe de 0 à $i_1 = \frac{E}{R_1}$ comptée positivement avec une orientation convenable des spires (R_1 étant la résistance de (S). Le champ magnétique créé par ce courant est uniforme à l'intérieur de (S) et sa valeur passe pendant Δt_1 de 0 à

$\|\vec{B}_{C_1}\| = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N_1}{l_1} \cdot i_1$. Orientons les spires de (S') de manière que le flux de $\vec{B}_{C_1}$ dans (S') soit positif. Ce flux varie pendant Δt_1 de 0 à $N_2 S_2 \|\vec{B}_{C_1}\|$. Il s'agit d'une augmentation de flux dans



(S'), il en résulte la création d'une f.é.m induite et d'un courant induit dont l'effet est de modérer la variation du flux inducteur de $\vec{B}_{C_1}$: le courant induit produit un champ magnétique $\vec{B}_{C_2}$ de sens contraire à $\vec{B}_{C_1}$.

Cela se traduit par des signes contraires pour la f.é.m induite et la variation de flux inducteur, conformément à la loi de LENZ. La f.é.m induite dans (S') a pour expression :

$$e_{1\text{ moy}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{N_2 \cdot S_2 \cdot \|\vec{B}_{C_1}\| - 0}{\Delta t_1} = - \frac{N_2 \cdot S_2 \cdot \|\vec{B}_{C_1}\|}{\Delta t_1}$$

Cette f.é.m induite donne dans (S') un courant induit d'intensité moyenne :

$$i_1' = \frac{e_{1\text{ moy}}}{R_2 + r} = - \frac{N_2 \cdot S_2 \cdot \|\vec{B}_{C_1}\|}{\Delta t_1 (R_2 + r)}$$

(R_2 étant la résistance de (S') et r étant la résistance du microampèremètre).

Le solénoïde (S') est traversé par une quantité d'électricité

$Q_1 = |i_1' \cdot \Delta t_1| = \frac{N_2 \cdot S_2 \cdot \|\vec{B}_{C_1}\|}{R_2 + r}$. Nous voyons que cette quantité d'électricité est indépendante de la durée Δt_1 .

Passons au calcul numérique :

Soit L_1 la longueur du fil de (S), ℓ_1 la longueur de ce solénoïde (S), L_2 la longueur du fil de (S'), ℓ_2 la longueur de cette deuxième bobine et d le diamètre du fil bobiné.

$$R_1 = \rho \frac{L_1}{S} = \rho \frac{N_1 \pi D_1}{\pi \frac{d^2}{4}} = 24 \Omega ; i_1 = \frac{E}{R_1} = 0,5 \text{ A}$$

$$\|\vec{B}_{C_1}\| = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N_1}{\ell_1} i_1 = 2,51 \times 10^{-3} \text{ T} ; S_2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 7,07 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$e_{1\text{ moy}} = - \frac{N_2 S_2 \|\vec{B}_{C_1}\|}{\Delta t_1} = - 1,77 \times 10^{-3} \text{ V}$$

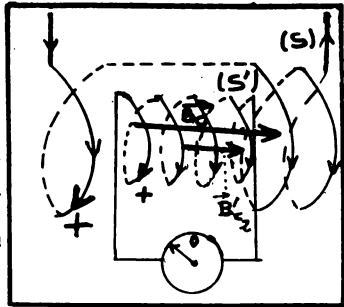
$$R_2 = \rho \frac{L_2}{S} = \rho \frac{N_2 \cdot \pi \cdot D_2}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}} = 6 \Omega$$

$$Q_1 = \frac{N_2 S_2 \|\vec{B}_{C_1}\|}{R_2 + r} \implies Q_1 = 4,42 \times 10^{-7} \text{ C}$$

2) Pendant l'intervalle de temps $\Delta t_2 = 15 \text{ min}$, le courant dans (S) a une intensité constante $\implies \|\vec{B}_{C_1}\|$ reste constant et le flux magnétique dans (S') ne varie pas. Donc, il n'y a pas de f.é.m induite ni de courant induit dans (S'). Le microampèremètre indique pendant cette durée une intensité nulle.

3) Pendant l'intervalle de temps Δt_3 , l'intensité du courant qui parcourt (S) passe de i_1 à zéro; la valeur du champ magnétique créé par ce courant passe de $\|\vec{B}_{C_1}\|$ à 0 et le flux magnétique traversant (S') décroît de $N_2 S_2 \|\vec{B}_{C_1}\|$ à zéro.

Il résulte de la variation du flux dans (S'), la création d'une f.é.m induite aux bornes de ce solénoïde. Le champ $\vec{B}_2$ qui résulte de cette f.é.m induite a le même sens que $\vec{B}_1$ pour s'opposer à la décroissance du flux de $\vec{B}_1$, conformément à la loi de Lenz : la f.é.m induite **modère** la variation du flux inducteur qui en est la cause.



Avec les orientations des spires de (S) et de (S'), nous voyons que l'intensité du courant induit est positive, la f.é.m induite est elle-même donc positive. La f.é.m induite moyenne a pour expression :

$$e_{3 \text{ moy}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t_3} = - \frac{(0 - \Phi_1)}{\Delta t_3} = + \frac{\Phi_1}{\Delta t_3}$$

$$e_{3 \text{ moy}} = \frac{N_2 \cdot S_2 \parallel \vec{B}_{C1}}{\Delta t_3} = \frac{N_2 \cdot \pi D_2^2 \parallel \vec{B}_{C1}}{4 \Delta t_3} = + 4,43 \times 10^{-3} \text{ V}$$

La quantité d'électricité qui traverse (S') pendant Δt_3 est :

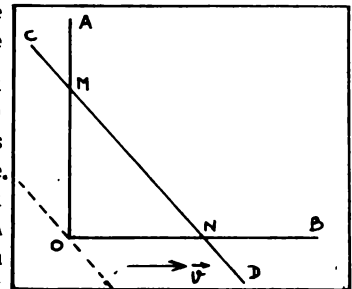
$$Q_3 = |i_3 \cdot \Delta t_3| = \frac{e_{\text{moy}_3}}{R_2 + r} \cdot \Delta t_3 = \frac{\Phi_1}{\Delta t_3 \cdot (R_2 + r)} \cdot \Delta t_3 = \frac{\Phi_1}{R_2 + r}$$

A.N : $Q_3 = 4,42 \times 10^{-7} \text{ C}$

La quantité d'électricité qui traverse (S') est encore indépendante du temps. Nous remarquons que $Q_1 = Q_3$. Ce résultat est dû au fait que la variation de flux pendant Δt_1 a la même valeur absolue que la variation de flux pendant Δt_3 .

Exercice n° 2

On reprend les trois tiges conductrices considérées en page 91. Les deux tiges OA et OB soudées à angle droit forment un plan horizontal traversé par les lignes de champ d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical orienté vers le haut et valant 0,2 T. La troisième tige (CD) est en mouvement de translation sous l'effet d'une action purement mécanique. Elle reste parallèle à elle-même et fait toujours un angle de 45° avec OA et un angle de 45° avec OB. Elle est en contact avec OA et OB respectivement aux points M et N. Le point N se déplace sur OB à la vitesse constante de $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



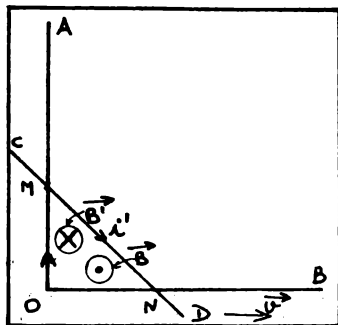
1) Montrer que le circuit OMN est parcouru par un courant. Déterminer avec justification le sens de ce courant.

2) Sachant que la longueur ON a varié de 0 à 1 m au cours du mouvement considéré, calculer la valeur algébrique de la f.é.m moyenne qui a pris naissance aux bornes M et N.

Corrigé

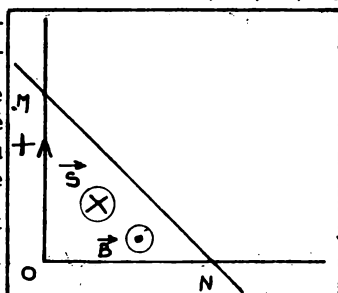
Représentons le plan horizontal vu de dessus : $\vec{B}$ qui est vertical orienté vers le haut est sortant pour le plan de figure.

1) En déplaçant la tige CD, nous augmentons l'aire du cadre triangulaire fermé traversé par les lignes du champ $\vec{B}$ et nous augmentons par conséquent la valeur absolue du flux magnétique à travers cette surface fermée. La variation de flux crée une f.é.m induite aux bornes M et N et un courant induit dans le circuit OMN.



En vertu de la loi de LENZ, le courant induit a pour effet de modérer la variation de flux qui lui donne naissance, donc ce courant induit crée un flux induit de signe contraire au flux de $\vec{B}$: Le courant induit crée un champ $\vec{B}'$ de sens contraire à $\vec{B}$; $\vec{B}'$ est rentrant pour le plan de la figure, la face représentée est une face sud et le sens du courant induit est $O \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow O$.

2) Orientons le triangle OMN positivement dans le sens $O \rightarrow M \rightarrow N$. Le vecteur surface $\vec{S}$ est vers la gauche d'un observateur placé contre un côté du triangle et regardant l'intérieur du cadre triangulaire. On voit ainsi que $\vec{B}$ et $\vec{S}$ forment entre eux un angle plat (180°).



Initialement $OM = 0 \implies \Phi_1 = 0 \text{ Wb}$

Finalement $OM = \ell \implies \Phi_2 = \|\vec{B}\| \frac{\ell^2}{2} \cos 180^\circ = - \|\vec{B}\| \frac{\ell^2}{2}$

La durée de la variation du flux est : $\Delta t = \frac{\ell}{v}$

La f.é.m induite moyenne a pour expression :

$$e_{\text{moy}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \|\vec{B}\| \cdot \frac{\ell}{2} \cdot v > 0$$

La f.é.m induite est positive, ce résultat est en accord avec le sens du courant trouvé au " 1) ".

A.N : $e_{\text{moy}} = + 0,6 \text{ V}$

COMMENTAIRE :

On aurait pu choisir le sens positif $O \rightarrow N \rightarrow M$ sur le triangle, cela nous aurait donné $\vec{S}$ et $\vec{B}$ colinéaires et de même sens, un flux magnétique positif et une f.é.m induite négative. Cela est en accord avec ce que nous avons obtenu avec l'autre orientation du triangle : le courant induit a le sens $O \rightarrow M \rightarrow N$.

Exercice n° 3

1) Une bobine longue comporte $N = 1000$ spires réparties régulièrement sur une longueur $\ell = 0,5$ m. Le rayon d'une spire est $r = 0,05$ m. On introduit dans cette bobine un barreau de fer doux (sans aucun contact avec le fil conducteur enroulé sur un cylindre isolant). La mesure de l'inductance de la bobine munie de son noyau de fer donne $L = 0,25$ H. Calculer la perméabilité relative du noyau de fer dans les conditions considérées, c-à-d , le nombre par lequel le flux propre de la bobine se trouve multiplié grâce au noyau de fer doux. $\pi^2 \approx 10$

2) On fait passer dans la bobine précédente, munie de son noyau, un courant continu dont l'intensité varie linéairement de 0 A à 12 A en 8 secondes. Montrer que la bobine est parcourue par un courant auto-induit pendant ces 8 s. Calculer la valeur i' de l'intensité de ce courant auto-induit, sachant que la résistance de la bobine est $R = 18 \Omega$. Représenter une spire de la bobine, vue de face, avec les sens des deux courants (d'intensités i " qui varie de 0 à 12 A " et i').

3) Calculer l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine munie de son noyau lorsqu'elle est parcourue par le courant d'intensité $I = 12$ A. Par quel phénomène se manifeste cette énergie quand on ouvre brusquement un interrupteur dans le circuit dont fait partie la bobine ?

Corrigé

1) Considérons le solénoïde sans noyau de fer. Lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité i , il est traversé par un flux propre $\Phi_p = L_1 \cdot i$, (L_1 étant l'inductance de cette bobine sans noyau de fer). Si on place un noyau de fer dans cette bobine, le même courant d'intensité i produit à travers les spires un flux propre $\Phi'_p = L \cdot i$ nettement plus grand que Φ_p .

(L étant l'inductance de la bobine avec son noyau de fer).

La perméabilité relative du noyau de fer est le rapport $\mu_r = \frac{L}{L_1}$. C'est un nombre réel positif sans unité.

L'énoncé nous donne la valeur de L , calculons celle de L_1 .

$$L_1 = \frac{\Phi_p}{i} = \frac{N S \|\vec{B}_c\|}{i} = N \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} = 4\pi^2 10^{-7} \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot r^2$$

$$\text{Numériquement : } L = 2 \times 10^{-2} \text{ H}$$

La perméabilité relative du noyau de fer est :

$$\mu_r = \frac{L}{L_1} = \frac{0,25}{0,02} = 12,5$$

2) L'intensité du courant varie linéairement de 0 A à 12 A en 8 s, donc pour toute date $t \in [0 \text{ s} ; 12 \text{ s}]$, on a $i = K t$

avec $i = I = 12$ A pour $t = 8$ s d'où $K = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$

Pendant ces 8 secondes, le flux magnétique propre à travers les spires de la bobine varie de zéro à $L \cdot I$, cette bobine est donc le siège d'une f.é.m induite (et plus précisément auto-induite puisque le flux variable dans la bobine est son flux

propre).

A un instant $t \in \{0 \text{ s} ; 8 \text{ s}\}$, le flux propre dans la bobine est $\Phi_p = L.i = L.K.t$; la f.é.m auto-induite est: $e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -LK$

La f.é.m auto-induite est négative : si le courant, d'intensité i variable positive (**sens +**) parcourt la bobine, cette bobine est alors parcourue par un courant auto-induit d'intensité négative, c-à-d que le courant auto-induit a le sens contraire du courant variable qui en a été la cause.

Soit R la résistance de la bobine. L'intensité du courant auto-induit est :

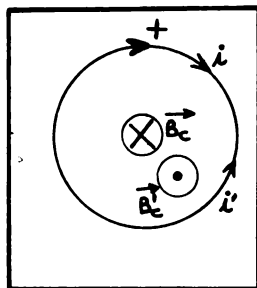
$$i' = \frac{e}{R} = -\frac{L K}{R}$$

A.N : $e = -0,375 \text{ V}$; $i' = -2,08 \times 10^{-3} \text{ A}$

Représentons une spire du solénoïde, vue de face:

Le courant auto-induit a le sens contraire de celui du courant variable qui lui a donné naissance, c'est conforme à la loi de Lenz:

le flux du champ $\vec{B}_c$ créé par le courant d'intensité variable croît, le courant induit modère et limite cette croissance en produisant un champ $\vec{B}'_c$ de sens contraire à $\vec{B}_c$: le flux induit limite et modère la croissance du flux inducteur.



3) La bobine longue, munie de son noyau de fer, est parcourue par un courant d'intensité constante; elle emmagasine alors une énergie électromagnétique $W = \frac{1}{2} L I^2 = 18 \text{ J}$.

Si on ouvre brusquement l'interrupteur dans le circuit comprenant la bobine, le flux propre s'annule en un très court intervalle de temps dans la bobine. Cette variation brusque de flux engendre un courant auto-induit de même sens que le courant d'intensité décroissante : c'est encore la loi de Lenz qui est vérifiée, le flux induit a le même sens que le flux inducteur décroissant pour modérer cette décroissance.

La durée de la variation de flux étant très courte, la bobine libère en très peu de temps l'énergie électromagnétique qui y était emmagasinée et il en résulte un courant auto-induit tellement intense qu'une étincelle jaillit entre les deux contacts de l'interrupteur: c'est l'étincelle de rupture.

Exercice n° 4

Un solénoïde a pour inductance $L = 0,2 \text{ H}$ et pour résistance $R = 6,5 \Omega$. On produit dans ce solénoïde un courant continu d'intensité $i = 0,5 \text{ A}$. Calculer l'intensité i' du courant auto-induit dans cette bobine à la date $t = 0,5 \text{ s}$. Représenter une spire du solénoïde, vue de face, avec les sens des courants d'intensités i et i' .

Corrigé

Le courant qui passe dans le solénoïde a une intensité croissante donc les valeurs du champ magnétique créé par ce courant à l'intérieur du solénoïde et du flux propre de ce solénoïde croissent aussi. Il en résulte une f.é.m auto-induite et un courant auto-induit de sens contraire au courant d'intensité variable afin que le flux auto-induit modère et limite l'augmentation du flux propre.

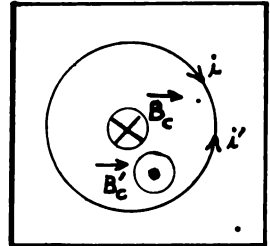
La f.é.m auto-induite a pour expression:

$$e = - L \frac{di}{dt} ; i = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = t \quad \text{alors} \quad e = - L t$$

L'intensité du courant auto-induit est donc :

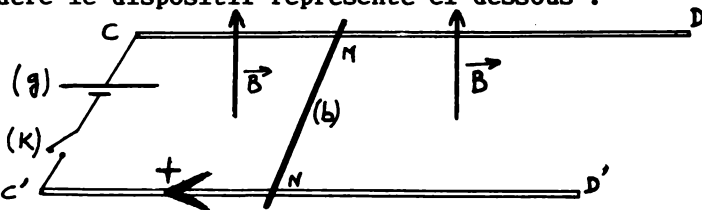
$$i' = \frac{e}{R} = - \frac{L t}{R} \quad \text{A.N à } t = 0,5 \text{ s : } i' = - 1,54 \times 10^{-2} \text{ A}$$

i' est négative alors que i est positive, cela signifie que le courant auto-induit a le sens contraire de celui du courant d'intensité variable i , comme nous l'avons signalé précédemment. Représentons une spire du solénoïde, vue de face (figure ci-contre). Représentons aussi les champs magnétiques créés par les courants d'intensités i et i' : nous nous rendons compte du fait que le flux induit est opposé au flux inducteur ; cela est conforme à la loi de Lenz, puisque le flux inducteur est croissant.



Exercice n° 5

On considère le dispositif représenté ci-dessous :



- * CD et C'D' sont deux rails en cuivre, parallèles horizontaux, de résistance négligeable, distants de $d = 0,20 \text{ m}$.
- * (g) est un générateur de tension, de f.é.m $E = 6 \text{ V}$ et de résistance négligeable.
- * (b) est une barre pouvant se déplacer dans le plan des rails CD et C'D', en restant perpendiculaire à ces rails avec lesquels elle a les contacts M et N. La longueur de la barre (b) est pratiquement égale à $d = 0,20 \text{ m}$. La résistance de (b) est $R = 2 \Omega$.
- * (K) est un interrupteur.

Le circuit MCC'N est orienté comme l'indique le schéma.

Les rails plongent en entier dans un espace champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical, orienté vers le haut et valant

0,5 T. Initialement, (K) est ouvert et (b) est immobile assez loin de C et C'. On ferme (K). Montrer que la barre (b) se met en mouvement. Exprimer l'intensité du courant qui passe dans cette barre à un instant t en fonction de la vitesse v de cette barre à l'instant considéré.

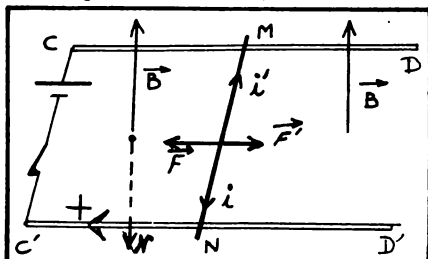
A.N : Calculer l'intensité du courant résultant dans (b) pour $v = 1,5 \text{ m. s}^{-1}$

On négligera l'action du champ magnétique terrestre.

Corrigé

Avec l'orientation du circuit, donnée par l'énoncé, l'intensité i du courant débité par le générateur (g) est positive; avec cette orientation du circuit, le flux de $\vec{B}$ dans le circuit fermé est négatif.

Lorsqu'on ferme l'interrupteur K un courant électrique passe dans le circuit fermé et ce courant a le sens M → N dans la barre (b).



Le conducteur MN parcouru par un courant et placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ est alors soumis à la force électromagnétique $\vec{F}$ (force de Laplace). Cette force est perpendiculaire au plan (MN, $\vec{B}$), elle est donc horizontale; elle est orientée vers la gauche d'un observateur qui, placé contre MN, traversé par le courant des pieds vers la tête, regarde dans le sens de $\vec{B}$. La barre MN se met en mouvement, parallèlement à elle-même, ses extrémités M et N se déplaçant suivant DC et D'C' (figure).

Le déplacement de la barre MN fait varier le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit fermé CC'NM, ce flux diminue en valeur absolue puisque la surface fermée traversée par les lignes de champ diminue. Il y a alors naissance d'une f.é.m induite aux bornes M et N, cette f.é.m induite a pour effet de s'opposer à la diminution du flux de $\vec{B}$.

Le courant induit est tel que la force électromagnétique $\vec{F}'$ qui en résulte pour MN s'oppose à $\vec{F}$.

Les intensités i et i' sont de signes contraires: $i > 0$ et $i' < 0$

A un instant t, la barre est animée d'une vitesse $\vec{v}$. Entre l'instant t et l'instant t + dt infiniment voisin de t, la surface du circuit fermé varie de $dS = (-v \cdot dt)$. d ($v > 0$)
Le flux varie de $d\phi = \|\vec{B}\| \cdot (-v \cdot dt) \cdot \cos 180^\circ = -\|\vec{B}\| \cdot v \cdot dt$

La f.é.m induite est alors : $e = - \frac{d\phi}{dt} = - \|\vec{B}\| \cdot v \cdot d$

Le courant induit a pour intensité : $i' = \frac{e}{R} = - \frac{\|\vec{B}\| \cdot v \cdot d}{R}$

(R étant la résistance du circuit = la résistance de (b))

La barre est parcourue par un courant électrique résultant d'intensité $i_0 = i + i'$

$$i_0 = \frac{E - \|\vec{B}\| d v}{R}$$

A l'instant où $v = 1,5 \text{ m. s}^{-1}$, l'intensité du courant résultant dans la barre (b) est :

$$i_0 = \frac{6 - 0,5 \times 0,2 \times 1,5}{2} = 2,93 \text{ A}$$

Exercice n° 6

1) Un solénoïde d'inductance $L = 0,5 \text{ H}$ est parcouru par un courant continu d'intensité constante I_1 . Il emmagasine alors une énergie électromagnétique $W_1 = 4 \text{ joules}$. Calculer I_1 .

2) La résistance de ce solénoïde est $R = 5 \Omega$. On y fait décroître l'intensité du courant suivant la loi :

$$i = -0,25 t + I_1$$

à partir d'un instant pris comme origine de temps. Déterminer le sens du courant résultant dans la bobine et en calculer l'intensité à la date $t = 6 \text{ s}$.

Corrigé

1) Le solénoïde parcouru par un courant continu d'intensité I_1 emmagasine une énergie électromagnétique $W_1 = \frac{1}{2} L \cdot I_1^2$

L'intensité du courant est donc :

$$I_1 = \sqrt{\frac{2 W_1}{L}} = 4 \text{ A}$$

2) A un instant t , le flux propre qui traverse les spires du solénoïde est : $\Phi_p = L i = L (-0,25 \cdot t + I_1)$

Ce flux propre est variable, le solénoïde est donc le siège d'une f.é.m auto-induite e qui s'écrit :

$$e = - \frac{d\Phi_p}{dt} = 0,25 L$$

Nous voyons que cette f.é.m auto-induite est constante donc l'intensité du courant auto-induit est aussi constante, elle vaut :

$$i' = \frac{e}{R} = \frac{0,25 L}{R} \quad (R \text{ étant la résistance du solénoïde }).$$

Ce courant auto-induit a le même sens que le courant inducteur décroissant, pour que, conformément à la loi de Lenz, le flux auto-induit s'oppose à la diminution du flux propre.

Les deux courants étant de même sens, la valeur absolue de l'intensité du courant résultant est la somme des valeurs absolues des intensités i et i' .

A l'instant $t = 6 \text{ s}$, on a :

$$i = -0,25 \times 6 + 4 = 2,5 \text{ A}$$

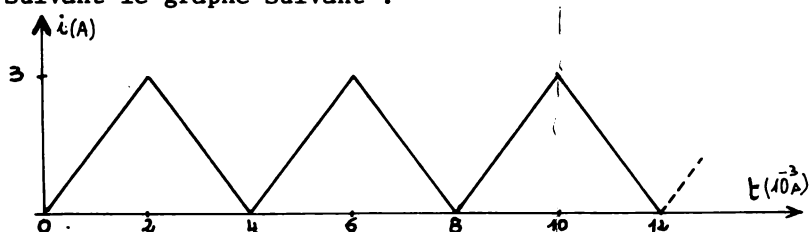
$$i' = \frac{0,25 \cdot L}{R} = \frac{0,25 \times 0,5}{5} = 0,025 \text{ A}$$

Le courant résultant dans le solénoïde a pour intensité :

$$i_{\text{rés}} = 2,5 + 0,025 = 2,525 \text{ A}$$

Exercice n° 7

Un solénoïde est formé de $N = 800$ spires de diamètre $D = 6$ cm, réparties régulièrement sur une longueur $\ell = 0,60$ m. Il est parcouru par un courant dont l'intensité varie au cours du temps suivant le graphe suivant :



- 1) Calculer l'inductance L du solénoïde (supposé très long).
- 2) Représenter graphiquement la variation de la f.é.m auto-induite en fonction du temps, dans l'intervalle de temps $\{ 0 \text{ ms} ; 10 \text{ ms} \}$. On prendra $\pi^2 = 10$

Corrigé

1) Quand un courant d'intensité i passe dans le solénoïde, les spires de ce solénoïde sont traversées par un flux propre :

$$\Phi_p = N \cdot S \cdot \|\vec{B}_c\|$$

S étant la surface d'une spire, N étant le nombre de spires et $\|\vec{B}_c\|$ étant la valeur du champ magnétique créé par le courant à l'intérieur du solénoïde (champ uniforme).

$$\Phi_p = N \cdot S \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} \cdot i = N \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N}{\ell} \cdot i = \pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot D^2}{\ell} \cdot i$$

L'inductance du solénoïde est le rapport constant du flux propre à l'intensité du courant qui est à l'origine de ce flux propre :

$$L = \frac{\Phi_p}{i} = \pi^2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot D^2}{\ell}$$

$$\text{A.N : } L = 3,84 \times 10^{-3} \text{ H}$$

2) La f.é.m auto-induite aux bornes du solénoïde s'écrit :

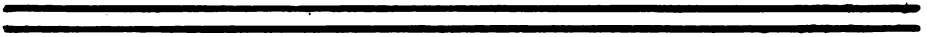
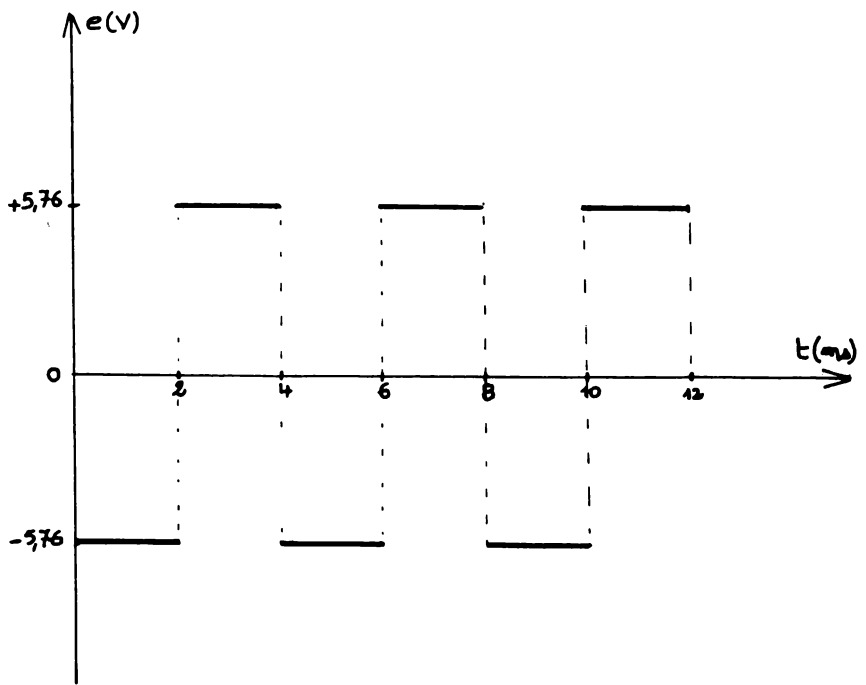
$$e = -L \frac{di}{dt}$$

i varie linéairement dans chaque intervalle de 2 ms, donc à tout instant t , on a $|\frac{di}{dt}| = |\frac{\Delta i}{\Delta t}| = 1500 \text{ A.s}^{-1}$ et $|e| = 5,76 \text{ V}$

* pour $t \in \left[\{ 0 \text{ ms} ; 2 \text{ ms} \} ; \{ 4 \text{ ms} ; 6 \text{ ms} \} ; \{ 8 \text{ ms} ; 10 \text{ ms} \} \dots \right]$
 $\frac{di}{dt} > 0$ et $e = -5,76 \text{ V}$

* pour $t \in \left[\{ 2 \text{ ms} ; 4 \text{ ms} \} ; \{ 6 \text{ ms} ; 8 \text{ ms} \} \dots \right]$
 $\frac{di}{dt} < 0$ et $e = +5,76 \text{ V}$

Nous obtenons ainsi le graphe suivant :



6 - ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGEE EN MOUVEMENT

Exercice n° 1

Soit un repère Oxyz orthonormé tel que les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ peuvent être représentés respectivement par le pouce, l'index et le majeur de la main droite ou par un observateur traversé par $\vec{i}$ des pieds vers la tête, regardant dans le sens de $\vec{j}$ et ayant $\vec{k}$ vers sa gauche.

Un faisceau homocinétique très fin d'électrons pénètre en O, dans un espace champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B} = 2 \times 10^{-3} \vec{j}$, avec la vitesse $\vec{v}_0 = 2 \times 10^7 \vec{i}$. L'action de $\vec{B}$ est limitée à la région comprise entre les plans verticaux d'équations $x = 0$ m et $x = 0,03$ m.

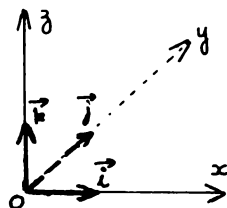
$\|\vec{B}\|$ est en tesla, $\|\vec{v}_0\|$ est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Montrer que le mouvement des électrons dans le champ magnétique est circulaire uniforme.

2) Calculer le rayon de la trajectoire des électrons.

3) Déterminer les coordonnées du point où le faisceau d'électrons sort de l'espace champ magnétique considéré.

On négligera l'action du champ de pesanteur et du champ magnétique terrestre sur les électrons.



Corrigé

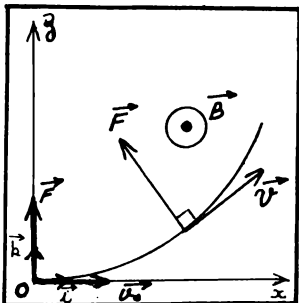
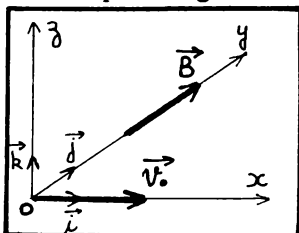
1) Considérons un électron pénétrant avec la vitesse $\vec{v}_0$ en O à la date $t = 0$ s dans le repère Oxyz. Le champ $\vec{B}$ agit sur un électron animé d'une vitesse $\vec{v}$ par une force magnétique appelée force de Lorentz perpendiculaire au plan $(\vec{v}, \vec{B})$, ayant pour valeur: $\|\vec{F}\| = |q| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \alpha$

α étant l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Le sens de $\vec{F}$ est vers la gauche d'un observateur regardant dans le sens de $\vec{B}$, en étant traversé par le vecteur $q\vec{v}$ de ses pieds vers sa tête.

$\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{j}$; $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{k}$: le vecteur accélération n'a pas de composantes suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$, donc le vecteur vitesse aura uniquement des composantes suivant $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

Le mouvement de l'électron est **plan** contenu dans $(0, \vec{i}, \vec{k})$.



Sous l'action de $\vec{F}$, l'électron subit une déviation: la trajectoire s'incurve. La vitesse est à chaque instant perpendiculaire à la force magnétique de Lorentz et elle est tangente à la trajectoire. Nous en déduisons que la force magnétique n'a pas de composante tangentielle et par conséquent la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où } v \text{ et } \|\vec{v}\| \text{ sont constantes: l'accélération}$$

de l'électron se réduit à la composante normale qui modifie la direction de la vitesse: le champ magnétique est déviateur et il n'est pas accélérateur.

La R.F.D s'écrit pour l'électron: $\vec{F} = m \vec{\gamma}$

$$\|\vec{\gamma}\| = \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m} = \frac{e \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\|}{m} = \text{constante} \Rightarrow \forall t, \|\vec{v}\| = \|\vec{v}_0\|$$

Pour un mouvement curviligne, on a $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$ (ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire). En égalisant les deux expressions de γ_n , nous déduisons: $\rho = \frac{m \cdot \|\vec{v}\|}{e \cdot \|\vec{B}\|} = \text{constante}$

La trajectoire de l'électron a un rayon de courbure constant et sa vitesse garde une valeur constante: le mouvement de l'électron est CIRCULAIRE UNIFORME.

2) Le rayon de la trajectoire circulaire est égal au rayon de courbure calculé plus haut. Remplaçons e , $\|\vec{B}\|$, $\|\vec{v}\|$ et m par leurs valeurs numériques, nous obtenons: $\rho = R = 5,63 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

3) Soit C le centre de la trajectoire. $\vec{v}_0$ est tangente en O à la trajectoire et $\vec{Oz} \perp \vec{v}_0$ d'où $C \in \vec{Oz}$.

Désignons par S le point d'émergence des électrons, c-à-d le point où chaque électron quitte l'espace champ magnétique. La tangente en S à la trajectoire coupe Ox au point I.

$\left. \begin{array}{l} CO \perp IO' \\ CS \perp IS \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{SCO} = \widehat{SIO'}$. Soit α leur valeur.
Projetons S sur OC en H

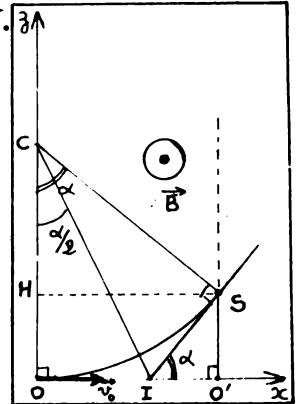
$$\sin \alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{d}{R}$$

Nous en déduisons la valeur de α .

Les triangles COI et CSI rectangles respectivement en O et S ont le côté CI commun et $OC = SC = R$; $\cos \widehat{ICS} = \frac{CS}{CI} = \frac{R}{CI}$
 $\cos \widehat{ICO} = \frac{CO}{CI} = \frac{R}{CI}$ donc les angles $\widehat{ICS}$ et $\widehat{ICO}$ ont des cosinus égaux et ils sont aigus: ils ont la même mesure $\frac{\alpha}{2}$

Par conséquent $IO = CO \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

La coordonnée du point d'émergence S suivant $(0, \vec{k})$ est:
 $z = O'S = IO' \operatorname{tg} \alpha = (d - R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}) \operatorname{tg} \alpha$



Application numérique :

$$\sin \alpha = \frac{3}{5,63} = 0,53 \implies \alpha = 32^\circ$$

$$\text{d'où } \operatorname{tg} \alpha = 0,63 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,29$$

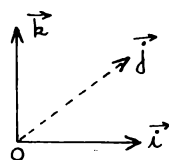
$$\text{Finalement: } z_S = (3 - 5,63 \times 0,29) \times 10^{-2} \times 0,63 = 8,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{Les coordonnées du point S sont : } \begin{cases} x = 3 \text{ cm} \\ y = 0 \\ z = 8,6 \text{ mm} \end{cases}$$

Exercice n° 2

Soit le repère Oxyz orthonormé dont les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont disposés comme l'indique la figure, c'est donc un repère identique à celui de l'exercice précédent.

On introduit dans ce repère d'espace un faisceau d'hélium ayant tous des vitesses de même direction et de même sens que $\vec{i}$, mais de valeurs qui diffèrent d'un hélium à un autre.



Un hélium (ou particule α) est un corpuscule qui a pour masse $m = 4 \text{ u} \approx 6,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et pour charge électrique $q = 2e = + 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$;

On se propose de récupérer seulement les hélium qui ont la vitesse $\vec{v}_1 = 2 \times 10^7 \vec{i}$, grâce à un sélecteur appelé " filtre de vitesse ". Pour cela, on fait régner dans le repère d'espace Oxyz un champ électrique $\vec{E} = 2 \times 10^4 \vec{k}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{j}$ ($\|\vec{E}\|$ en V.m^{-1} et B réel relatif exprimé en tesla).

Déterminer le sens et la valeur de B pour que les hélium animés de la vitesse $\vec{v}_1$ ne subissent aucune déviation. Que se passe-t-il pour les autres hélium ?

On négligera l'action du champ de pesanteur et du champ magnétique terrestre sur les hélium.

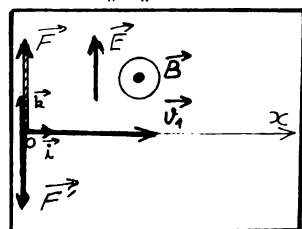
Corrigé

Considérons un hélium animé d'une vitesse $\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{i}$ dans le repère Oxyz où règnent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

L'hélium est soumis de la part de $\vec{E}$ à une force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$; comme $q > 0$, $\vec{F}$ a la direction et le sens de $\vec{E}$ donc de $\vec{k}$.

Le champ $\vec{E}$ dévie l'hélium suivant $\vec{k}$.

Le champ magnétique $\vec{B}$ exerce sur l'hélium une force magnétique (de Lorentz) $\vec{F}'$ perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}$ donc cette force est colinéaire à $\vec{k}$. Suivant le sens de $\vec{B}$, les déviations de la trajectoire de l'hélium par $\vec{E}$ et $\vec{B}$ peuvent être de même



sens ou de sens contraires.

Pour qu'un hélion puisse poursuivre son chemin suivant $(0, \vec{i})$ sans déviation, il faut que la somme des forces électrique et magnétique soit nulle. On a alors, conformément au principe de l'inertie, pour l'hélion "isolé", un mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0} \implies \vec{F}' = -\vec{F} = -\|\vec{F}'\| \vec{k}$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ doit avoir un sens tel qu'un observateur traversé par le vecteur $q\vec{v}$ des pieds vers la tête et regardant dans le sens de $\vec{B}$, a $\vec{F}$ vers sa gauche.

Nous trouvons ainsi que $\vec{B}$ est sortant pour le plan $(0, \vec{i}, \vec{k})$

Le vecteur champ magnétique s'écrit : $\|\vec{B}\| = -\|\vec{B}\| \vec{j}$

Calculons la valeur de $\vec{B}$: La relation $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$ donne :

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{F}'\| \implies q \|\vec{E}\| = q \|\vec{v}\| \|\vec{B}\| \text{ d'où : } \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{v}\|}$$

$$\text{A.N : } \|\vec{B}\| = 10^{-3} \text{ T}$$

La force électrique $\vec{F}$ est indépendante de la vitesse, elle est la même pour tous les hélions du faisceau hétérocinétique.

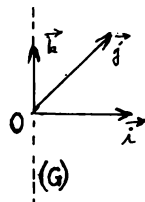
La force magnétique $\vec{F}'$ est colinéaire et de sens contraire à $\vec{F}$ et sa valeur $\vec{F}'$ est proportionnelle à la vitesse v de l'hélion en O:

* $\|\vec{v}\| > \|\vec{v}_1\|$: La force magnétique est plus intense que la force électrique: les hélions sont déviés dans le sens de $\vec{F}'$, c-à-d dans le sens de $-\vec{k}$

* $\|\vec{v}\| < \|\vec{v}_1\|$: La force magnétique est moins intense que la force électrique: les hélions sont déviés dans le sens de $\vec{F}$, c-à-d dans le sens de $\vec{k}$.

Exercice n° 3

Du chlore naturel est ionisé. Les ions chlorure obtenus sont accélérés par un champ électrique: les ions $^{35}_{17}\text{Cl}^-$ acquièrent la vitesse $\vec{v}_1 = 2 \times 10^5 \vec{i}$ et les ions $^{37}_{17}\text{Cl}^-$ acquièrent la vitesse $\vec{v}_2 = 1,94 \times 10^5 \vec{i}$ ($\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$ en m.s^{-1}). Le faisceau formé de ce mélange d'ions pénètre en O à travers une grille (G), à droite de laquelle régné un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B} = -0,2 \vec{j}$ ($\|\vec{B}\|$ en T). Les ions $^{35}_{17}\text{Cl}^-$ et les ions $^{37}_{17}\text{Cl}^-$ ressortent respectivement aux points O_1 et O_2 de la grille (G).



- 1) Etudier le mouvement des ions dans le champ magnétique.
- 2) Déterminer la position de chacun des points d'émergence

O_1 et O_2 .

On négligera l'action du champ de pesanteur et du champ magnétique terrestre sur les ions chlorure considérés.

Les masses des ions $^{35}_{17}\text{Cl}^-$ et $^{37}_{17}\text{Cl}^-$ sont respectivement 35 u et 37 u avec $1 \text{ u} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Corrigé

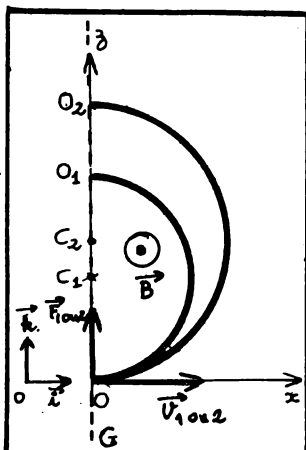
1) Considérons le repère plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
Le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ est sortant pour ce plan.

Un ion chlorure Cl^- , de charge électrique $q = -e$, pénétrant dans l'espace champ $\vec{B}$ avec une vitesse $\vec{v}$, subit une force magnétique (de Lorentz), qui a les caractéristiques suivantes :

* direction : perpendiculaire au plan $(\vec{v}, \vec{B})$ donc colinéaire à $\vec{k}$

* sens : vers la gauche d'un observateur regardant dans le sens de $\vec{B}$, en étant parcouru des pieds vers la tête par le vecteur $q \cdot \vec{v} = -e \cdot \vec{v}$.

* valeur : $\|\vec{F}_1\| = e \cdot \|\vec{v}_1\| \|\vec{B}\|$ pour un ion $^{35}_{17}\text{Cl}^-$
 $\|\vec{F}_2\| = e \cdot \|\vec{v}_2\| \|\vec{B}\|$ pour un ion $^{37}_{17}\text{Cl}^-$



Le même raisonnement que pour l'exercice n° 1 du présent chapitre donne pour chaque type d'ion, un mouvement circulaire uniforme. Les rayons des cercles-trajectoires sont :

$$R_1 = \frac{m_1 \cdot \|\vec{v}_1\|}{e \cdot \|\vec{B}\|} \text{ pour les ions chlorure 35}$$

$$\text{et } R_2 = \frac{m_2 \cdot \|\vec{v}_2\|}{e \cdot \|\vec{B}\|} \text{ pour les ions chlorure 37}$$

(L'élève est tenu de refaire entièrement le raisonnement lors de la résolution d'un devoir.)

La vitesse est tangente à la trajectoire, la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon de ce cercle, donc les centres des trajectoires circulaires sont sur l'axe Oz .

2) L'espace champ magnétique étant suffisamment étendu à droite de la grille (G), les trajectoires des deux types d'ions sont des DEMI-CERCLES et les ions ressortent par la grille (G) aux points O_1 et O_2 définis par $\vec{OO}_1 = 2 \cdot R_1 \cdot \vec{k}$ et $\vec{OO}_2 = 2 \cdot R_2 \cdot \vec{k}$

$$\text{A.N : } R_1 = \frac{35 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 2 \cdot 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \times 0,2} = 0,365 \text{ m}$$

$$R_2 = \frac{37 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 1,94 \cdot 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \times 0,2} = 0,375 \text{ m}$$

Les points d'émergence sont à $2 \cdot R_1 = 0,73 \text{ m}$ de O pour les ions

chlorure 35 et à $2 \cdot R_2 = 0,75$ m de 0 pour les ions chlorure 37. Une distance de 2 cm sépare les deux points d'émergence. C'est suffisant pour une séparation efficace des deux isotopes.

REMARQUE :

L'exercice que vous venez de résoudre illustre le principe du spectrographe de masse qu'on utilise pour séparer les isotopes d'un élément, sous forme d'ions de même charge et de masses différentes.

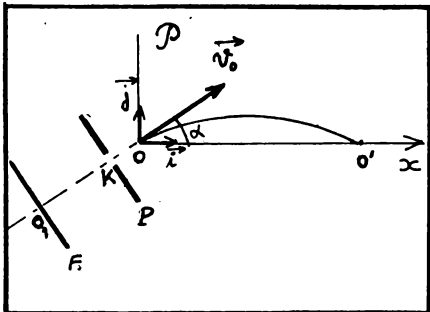
Exercice n° 4

Un canon à électrons comporte un filament F et une plaque P percée d'un trou K. F et P sont distants de 3 cm. Les électrons émis avec une vitesse initiale négligeable depuis F sont soumis à une d.d.p $U = V_P - V_F = + 300$ V

1) Déterminer les caractéristiques du champ électrique $\vec{E}$ entre F et P.

2) Calculer la vitesse des électrons lorsqu'ils arrivent en P et la durée de leur parcours entre F et P.

3) De la plaque P au point O, les électrons ont un mouvement rectiligne uniforme. En O, ils pénètrent dans un domaine où régit un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan P auquel est associé le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. En O, le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ des électrons est incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à la direction Ox qui est suivant $(O, \vec{i})$. Le champ magnétique $\vec{B}$ est tel que les électrons recoupent (Ox) en O'. La distance OO' est égale à 5 cm.



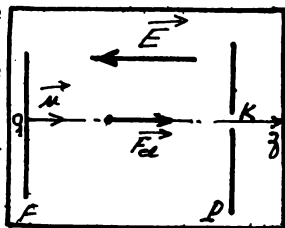
Déterminer les caractéristiques du champ $\vec{B}$.

D'après Bac Français
séries C et E 1984

Corrigé

1) Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté dans le sens des potentiels décroissants. La d.d.p $U = V_P - V_F$ est positive, donc le champ $\vec{E}$ est orienté de P vers F. Il est dirigé suivant la perpendiculaire commune à F et P. Sa valeur est:

$$\|\vec{E}\| = \frac{U}{d} = 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$



2) Considérons un électron émis par F au point O_1 à $t = 0$ s avec une vitesse initiale négligeable. Entre F et P, l'électron est soumis à la force électrique $\vec{F}_{e1} = q \vec{E} = -e \vec{E}$, colinéaire et de sens contraire au champ $\vec{E}$ (L'action du poids est négligeable). Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur $(O_1 z)$ normale en O_1 à F

On a $\vec{F}_{\text{él}} = -e \cdot \vec{E} = -e (- \|\vec{E}\| \cdot \vec{u}) = e \cdot \|\vec{E}\| \cdot \vec{u}$

Appliquons la R.F.D à cet électron: $\vec{F}_{\text{él}} = m \cdot \vec{\gamma}$

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} \cdot \vec{u}$, donc la vitesse de l'électron à la date t s'écrit : $\vec{v} = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} \cdot t \cdot \vec{u} + \vec{v}_0 = \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} \cdot t \cdot \vec{u}$ ($\vec{v}_0 = \vec{0}$)

Soit M la position de l'électron à un instant t entre F et P dans le repère ($O_1, \vec{u}$):

$$\vec{v} = \frac{d \vec{O_1 M}}{dt} \implies \vec{O_1 M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} t^2 \cdot \vec{u} + \vec{O_1 M}_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} t^2 \cdot \vec{u} \quad (\vec{O_1 M}_0 = \vec{0})$$

Le vecteur position $\vec{O_1 M}$ a une seule coordonnée, donc le mouvement de l'électron est RECTILIGNE ; cette coordonnée est de la forme $z = a \cdot t^2$, donc le mouvement est uniformément varié (accéléré puisque la vitesse initiale est nulle).

Appliquons la relation indépendante du temps entre les vitesses et les abscisses; soit K le point de P où sort l'électron.

$$v_K^2 - v_{O_1}^2 = 2 \gamma (z_K - z_{O_1}) = 2 \frac{e \cdot \|\vec{E}\|}{m} d$$

La vitesse en O_1 étant négligeable, $\|\vec{v}_K\| = \sqrt{\frac{2e \cdot \|\vec{E}\|}{m} d}$

$$\text{A.N : } \|\vec{v}_K\| = 1,03 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

La durée du parcours de l'électron de F à P est déterminée à partir de $d = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2$ ou de $v_K = \gamma \cdot t$

En effet, pour un électron émis en O_1 à $t = 0$ s, la date de son arrivée en K est égale numériquement à la durée du parcours $O_1 K$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot m}{e \cdot \|\vec{E}\|}}$$

ou

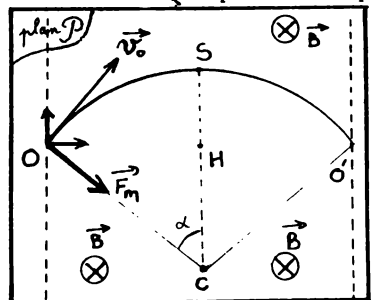
$$t = \frac{\|\vec{v}_K\|}{\gamma} = \frac{\|\vec{v}_K\| \cdot m}{e \cdot \|\vec{E}\|}$$

$$\text{A.N: } t = 5,8 \times 10^{-9} \text{ s}$$

3) Après leur sortie en K de l'espace champ électrique accélérateur régnant entre F et P , les électrons parcourent la distance KO avec la vitesse $\vec{v}_K$, d'un mouvement rectiligne uniforme, car la seule force qui agit sur chaque électron dans ce parcours est son poids dont l'effet est négligeable pour des vitesses de l'ordre de 10^7 m.s^{-1} .

Considérons un électron pénétrant en O dans l'espace champ magnétique $\vec{B}$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}_K$

L'électron est alors soumis à une force magnétique $\vec{F}_{\text{mag}}$ de Lorentz, perpendiculaire à $\vec{B}$ et à $\vec{v}_0$, orientée vers la gauche d'un observateur traversé des pieds vers la tête par $-e \vec{v}_0$ et regardant dans le sens de $\vec{B}$



Nous voyons sur le schéma de la page précédente que pour avoir la déviation de l'électron représentée, $\vec{F}_{\text{mag}}$ doit être centripète et $\vec{B}$ doit être rentrant pour le plan P de la figure.

Le raisonnement que nous avons fait dans la résolution de l'exercice n° 1 (et que l'élève est tenu de refaire lors de la résolution d'un devoir) est valable dans le cas de l'exercice actuel: l'électron est animé dans l'espace $\vec{B}$ d'un mouvement circulaire uniforme, le rayon de la trajectoire est:

$$R = \frac{m \cdot \|\vec{v}_0\|}{e \cdot \|\vec{B}\|}$$

L'électron décrit l'arc $\widehat{OO'}$ de sommet S. Nous pouvons déterminer le centre C de la trajectoire: les tangentes en O et en S sont respectivement perpendiculaires aux rayons CO et CS: l'intersection des perpendiculaires en O et S à ces deux tangentes est le centre C.

$$\vec{v}_0 \perp CO \quad \text{et} \quad OO' \perp SC \quad \text{donc} \quad \widehat{SCO} = (\vec{i}, \vec{v}_0) = \alpha = 30^\circ$$

Le triangle OCO' est isocèle, CS est une hauteur issue de C donc elle est bissectrice de $\widehat{OCO'}$; nous en déduisons que $\widehat{OCO'}$ vaut 60° et que le triangle OCO' est équilatéral.

Connaissant $OO' = 5 \text{ cm}$, nous concluons que le rayon du cercle décrit par les électrons est $CO = CS = R = 5 \text{ cm}$.

Calculons la valeur de $\vec{B}$:

$$\|\vec{B}\| = \frac{m \|\vec{v}_0\|}{e R} \quad \text{A.N :} \quad \|\vec{B}\| = 1,16 \times 10^{-3} \text{ T .}$$

III-OPTIQUE

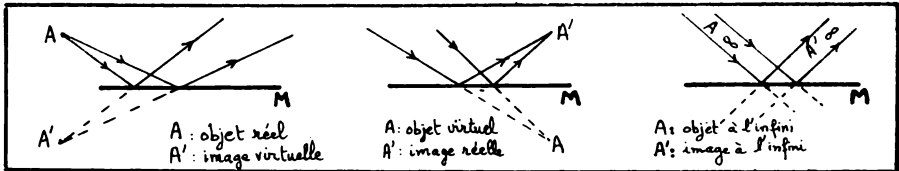
PRINCIPAUX RESULTATS

I- NOTION DE POINT OBJET ET DE POINT IMAGE:

Soit un système optique (miroir, lame à faces parallèles, lentille, association de lentilles, prisme). Les rayons lumineux que reçoit le système optique sont des rayons incidents; les rayons lumineux qui sortent du système optique sont des rayons émergents.

L'intersection de deux rayons incidents est un point objet; l'intersection de deux rayons émergents est un point image. Si l'intersection des rayons considérés est effective, le point objet ou le point image sont réels; si l'intersection est obtenue en prolongeant les rayons ou l'un des rayons, le point objet ou le point image sont virtuels. Lorsque les rayons incidents sont parallèles, le point objet est à l'infini; lorsque les rayons émergents sont parallèles, le point image est à l'infini.

Exemple : Considérons un miroir plan M



II- LENTILLES SPHERIQUES MINCES :

Une lentille mince sphérique possède deux foyers principaux (objet F et image F') et une infinité de foyers secondaires contenus dans le plan focal objet et le plan focal image. Le centre optique O se caractérise par le passage sans déviation de tout rayon incident en ce point O.

Le sens de propagation de la lumière étant pris comme sens positif, on a :

* pour une lentille convergente (à bords minces), $\overline{OF'} = f > 0$

* pour une lentille divergente (à bords épais), $\overline{OF'} = -f < 0$

L'élève doit savoir sans hésitation construire les rayons émergents correspondant à des rayons incidents particuliers. Nous avons rappelé les méthodes de construction des rayons dans la correction des exercices des pages 121 et 130 de l'ouvrage.

Les lentilles sont considérées dans les conditions de Gauss (rayons lumineux peu inclinés par rapport à l'axe principal Δ) Dans ces conditions, l'image d'un point est un point et l'image d'un segment AB perpendiculaire à (Δ) est elle-même un segment A'B' perpendiculaire à (Δ) . Si l'extrémité A est sur (Δ) , son image A' est aussi sur (Δ) , tel que :

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} \quad \left(\begin{array}{l} \text{formule de position} \\ \text{ou de conjugaison} \end{array} \right) \quad \text{et}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (\text{formule de grandissement})$$

Ces relations ou formules de conjugaison et de grandissement sont établies dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, O étant le centre optique de la lentille, $\vec{i}$ étant colinéaire à l'axe principal de la lentille et orienté dans le sens de la propagation de la lumière, $\vec{j}$ étant perpendiculaire à $\vec{i}$.

III- VERGENCE - LENTILLES ACCOLEES

1) Définition :

La vergence d'une lentille mince sphérique est $V = \frac{1}{\overline{OF'}}$

Le sens positif étant celui de la propagation de la lumière, la vergence est positive pour une lentille convergente, elle est négative pour une lentille divergente.

Dans le S.I d'unités, on exprime la vergence en dioptrie (δ).

2) Expression de la vergence :

* Si une face d'une lentille est telle que toute tangente à cette face traverse la matière de la lentille, on dit que la face est concave et son rayon de courbure est négatif.

* Si une face d'une lentille est telle que toute tangente à la face ne traverse pas la matière de la lentille, cette face est convexe et son rayon de courbure est positif.

Avec ces conventions, la vergence d'une lentille sphérique mince a pour expression :

$$V = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(n étant l'indice de réfraction de la matière transparente de la lentille qui se trouve dans l'air, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure des faces de cette lentille).

3) Accolement de deux lentilles; théorème :

Un système formé par deux lentilles sphériques minces accolées est équivalent à une lentille sphérique mince dont la vergence est égale à la somme des vergences de ces deux lentilles.

$$V = V_1 + V_2$$

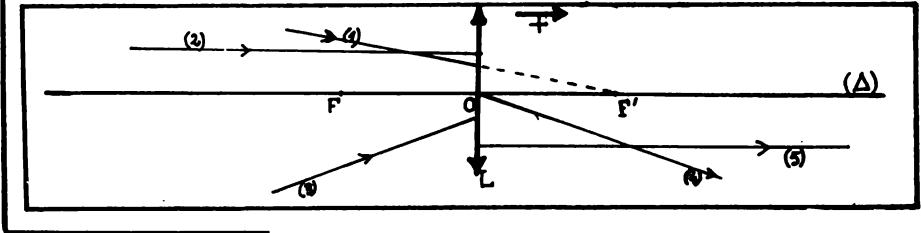
REMARQUE IMPORTANTE :

Nous avons utilisé, conformément au manuel scolaire officiel, la notation $OF = OF' = f > 0$, cette distance positive est la distance focale de la lentille, cela donne $\overline{OF'} = f$ pour une lentille convergente et $\overline{OF'} = -f$ pour une lentille divergente. Les auteurs de certains ouvrages utilisent une notation très différente: ils appellent «distance focale f » de la lentille la mesure algébrique $\overline{OF'}$, cela donne $f > 0$ pour une lentille convergente et $f < 0$ pour une lentille divergente.

1- LENTILLES CONVERGENTES

Exercice n° 1

Représenter les rayons émergents et les rayons incidents qui correspondent aux rayons tracés sur la figure suivante:



Corrigé

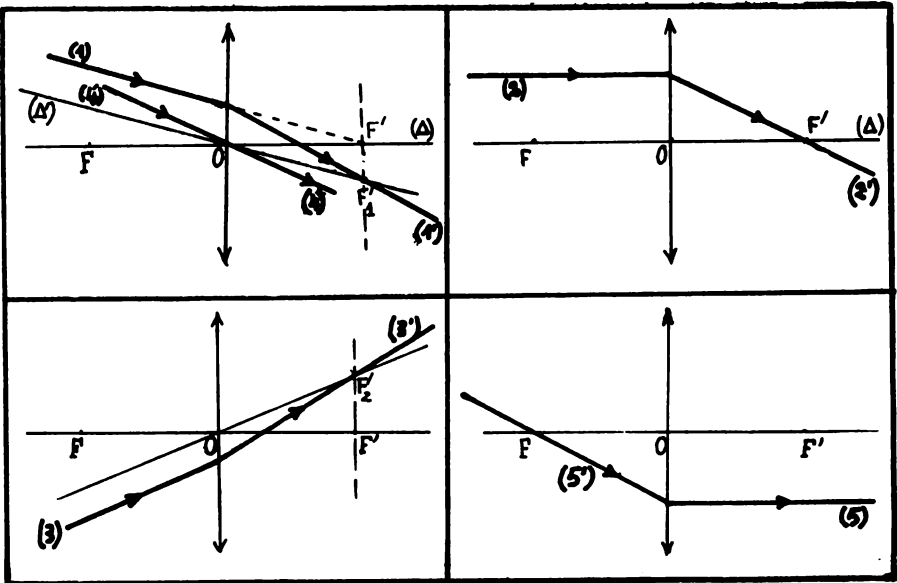
Un rayon incident parallèle à un axe secondaire Δ' émerge en passant par F'_1 , intersection du plan focal image avec Δ' .

Un rayon incident passant par le foyer principal objet F émerge parallèlement à l'axe principal.

Un rayon incident parallèle à l'axe principal émerge en passant par le foyer principal image F' .

Un rayon incident passant par le centre optique O ne subit pas de déviation.

On obtient ainsi les constructions suivantes :



On voit sur chacune des cinq constructions effectuées que si on considère le faisceau formé par le rayon incident (donné ou trouvé) et le rayon $\vec{FO}$, la lentille convergente en augmente la convergence ou en diminue la divergence (convergent $\rightarrow$ plus convergent ; divergent $\rightarrow$ parallèle)

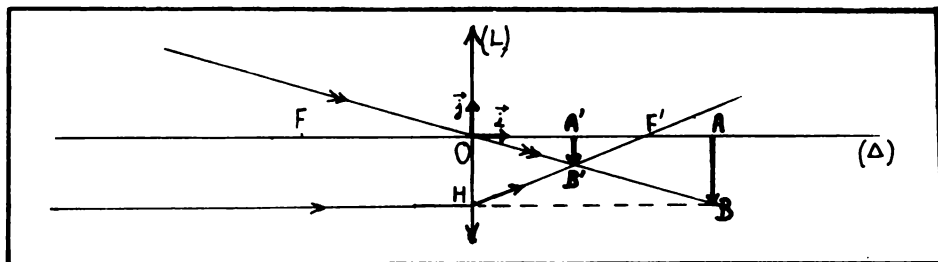
Exercice n° 2

Démontrer la formule de conjugaison $\frac{1}{OF'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA}$ et la

formule de grandissement $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ pour une lentille

convergente dans le cas d'un objet virtuel AB en forme de segment de droite perpendiculaire à l'axe principal de la lentille, A étant sur cet axe principal et A'B' étant l'image de AB avec $OA > OF'$

Corrigé



Soit un objet AB virtuel pour la lentille convergente (L), en forme de segment de droite perpendiculaire à l'axe principal (Δ) de (L); AB est une image donnée par un autre système optique, la lentille (L) intercepte les rayons qui émergent de cet autre système optique pour donner une image définitive A'B'.

Considérons deux rayons incidents pour (L) dont les prolongements se coupent en B: le premier passant par O traverse (L) sans déviation, le deuxième parallèle à (Δ) dévie vers F' foyer principal image de (L). L'intersection des rayons émergents de (L) est B' image de B par (L). La projection de B' sur (Δ) est l'image A' de A par (L) puisque, dans les conditions de Gauss, l'image d'un segment perpendiculaire à (Δ) est elle-même un segment perpendiculaire à (Δ).

Appliquons le théorème de Thalès pour les triangles OA'B' et OAB

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} \quad (1) \text{ C'est la formule de grandissement.}$$

Appliquons le théorème de Thalès pour les triangles F'A'B' et F'OH

$$\frac{A'F'}{OF'} = \frac{A'B'}{OH} \quad \text{or } OH = AB \text{ donc } \frac{A'F'}{OF'} = \frac{A'B'}{AB} \quad (2)$$

Combinons les égalités (1) et (2), nous obtenons :

$$\frac{A'F'}{OF'} = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow \frac{OF' - OA'}{OF'} = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow 1 - \frac{OA'}{OF'} = \frac{OA'}{OA} \quad (3)$$

Divisons les deux membres de l'égalité (3) par OA' :

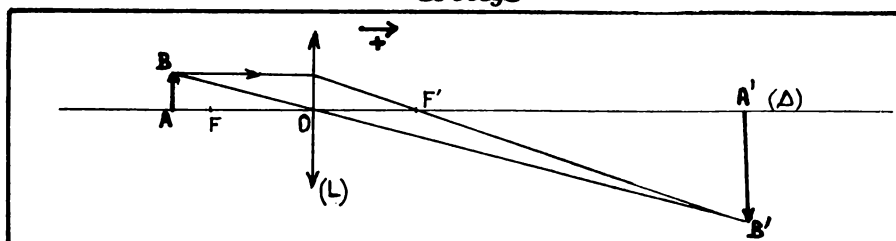
$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OF'} = \frac{1}{OA} \quad \text{d'où, finalement :}$$

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \quad \text{C'est la formule de position ou de conjugaison.}$$

Exercice n° 3

Un appareil de projection cinématographique est muni d'une lentille mince convergente. Le film se trouve à 20 m de l'écran et le grandissement est $\gamma = -80$. Déterminer la distance entre le film et la lentille puis la distance focale de la lentille.

Corrigé



Soit AB un segment de droite perpendiculaire à l'axe principal (Δ) de la lentille convergente, A étant sur (Δ) et AB appartenant au film. L'image de AB est elle-même, dans les conditions de Gauss, un segment de droite A'B' perpendiculaire à (Δ) La formule de grandissement s'écrit :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma$$

La distance entre le film et l'écran est: $|\overline{AA'}| = |\overline{AO} + \overline{OA'}|$

$$|\overline{AA'}| = |\overline{AO} + \gamma \overline{OA}| = |\overline{AO}| \cdot |(1 - \gamma)| = |\overline{AO}| \times |(1 - \gamma)|$$

La distance entre le film et la lentille est donc :

$$|\overline{AO}| = \frac{|\overline{AA'}|}{|1 - \gamma|} \quad \text{A.N :} \quad |\overline{AO}| = 0,247 \text{ m}$$

Appliquons la formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \implies \overline{OF'} = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$$

A.N : $\overline{OA} = -0,247 \text{ m}$; $\overline{OA'} = \gamma \overline{OA} = +19,76 \text{ m}$ d'où :

$$\overline{OF'} = +0,244 \text{ m} \implies f = 0,244 \text{ m}$$

Exercice n° 4

Montrer que si entre un objet réel et un écran, la distance D est supérieure à $4f$ (f étant la distance focale d'une lentille convergente), il y a deux positions de la lentille pour lesquelles on obtient une image réelle nette sur l'écran. Exprimer la distance focale f de la lentille en fonction de D et de la distance d séparant les deux positions de la lentille.

A.N : $D = 3 \text{ m}$; $d = 1,8 \text{ m}$. Calculer f .

Vérifier le résultat obtenu par une construction d'image à l'échelle 1/30.

Corrigé

Soit A un point objet réel sur l'axe principal de la lentille convergente et soit A' le point image réelle de A par cette

lentille. Si O est le centre optique de la lentille, on a $\overline{OA} = p < 0$ et $\overline{OA'} = p' > 0$

La distance entre l'objet et l'écran est :

$$D = |\overline{AA'}| = |\overline{AO} + \overline{OA'}| = |p' - p| = p' - p$$

D'autre part, la lentille est convergente, donc $\overline{OF'} = f > 0$ (F' étant le foyer principal image de la lentille).

La formule de conjugaison s'écrit : $\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \implies$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D + p} - \frac{1}{p} \implies \frac{1}{f} = \frac{-D}{p(D + p)}$$

D'où :

$$p^2 + D.p + D.f = 0$$

Cette équation du second degré en p a pour discriminant :

$$\Delta = D^2 - 4 D f = D(D - 4 f)$$

Comme D est positive et $D > 4f$ d'après l'énoncé, le discriminant est positif et l'équation admet deux racines réelles :

$$p_1 = \frac{-D + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } p_2 = \frac{-D - \sqrt{\Delta}}{2}$$

La distance entre les deux positions de la lentille est :

$$d = |p_1 - p_2| = \sqrt{\Delta} \text{ d'où : } d^2 = \Delta = D^2 - 4 D f$$

** Distance focale de la lentille :

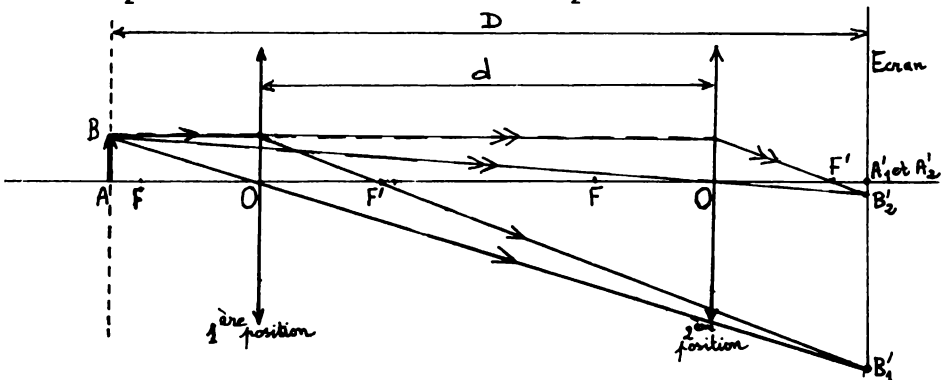
$$f = \frac{D^2 - d^2}{4 D}$$

$$\text{A.N : } f = 0,48 \text{ m}$$

** CONSTRUCTION GEOMETRIQUE :

Avec $D = 3 \text{ m}$, $d = 1,8 \text{ m}$ et $f = 0,48 \text{ m}$ on obtient $\Delta = 3,24$ puis $p_1 = -0,6 \text{ m}$ ce qui donne $p_1' = +2,4 \text{ m}$ et

$p_2 = -2,4 \text{ m}$ correspondant à $p_2' = +0,6 \text{ m}$



Exercice n° 5

On dispose d'une lentille convergente L_1 de centre optique O_1 et de distance focale $f_1 = 0,2 \text{ m}$. Sur l'axe principal (Δ) de L_1 , à $\overline{O_1A} = -0,3 \text{ m}$, se trouve l'extrémité A d'un objet réel AB en forme de segment de droite perpendiculaire à (Δ) et mesurant $AB = 8 \text{ mm}$. On dispose d'autre part d'une lentille convergente L_2 de centre optique O_2 et de distance focale $f_2 = 0,5 \text{ m}$, de même axe principal que L_1 , à $\overline{O_1O_2} = +0,45 \text{ m}$.

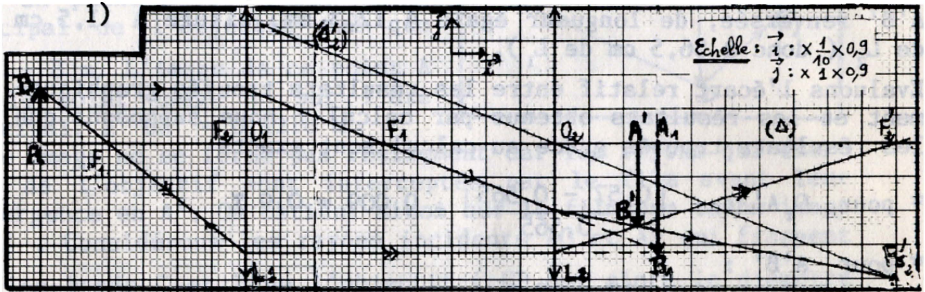
Déterminer la nature (réelle ou virtuelle), la position et la grandeur de l'image définitive de AB donnée par le système (L_1, L_2) :

1) par une construction géométrique très soignée (échelle 1/10 suivant (0, $\vec{i}$) pour les positions et échelle 1 suivant (0, $\vec{j}$) pour les grandeurs d'objets et d'images),

2) par le calcul utilisant les formules de position et de grandissement.

Evaluer l'écart relatif entre les résultats trouvés par les deux méthodes.

Corrigé



L'image A_1B_1 donnée par L_1 est obtenue en construisant l'image de B: un rayon incident issu de B et parallèle à (Δ) dévie vers F_1' ; un rayon issu de B passant par le foyer principal objet F_1 émerge parallèlement à (Δ) ; les rayons qui émergent de L_1 sont interceptés par L_2 : le rayon parallèle à (Δ) émerge en se dirigeant vers F_2' ; le rayon passant par F_1' émerge en se dirigeant vers le foyer secondaire image F_{S_2}' de L_2 : F_{S_2}' est dans le plan focal image de L_2 , sur l'axe secondaire (Δ_2') de L_2 , cet axe secondaire étant parallèle au rayon considéré qui passe par F_1' . L'intersection des deux rayons émergents de L_2 est l'image B' de B par le système (L_1, L_2) . La projection de B' sur (Δ) est l'image A' de A par ce système des deux lentilles.

On mesure : $\overline{A'B'} = -12 \text{ mm}$; $\overline{O_1A'} = +0,57 \text{ m}$.

2) Faisons le calcul utilisant les formules de conjugaison et de grandissement :

* La lentille L_1 donne de AB une image A_1B_1 telle que :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} \implies \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1F_1'}} + \frac{1}{\overline{O_1A}} \implies$$

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1F_1'} \cdot \overline{O_1A}}{\overline{O_1F_1'} + \overline{O_1A}} \quad \text{A.N : } \overline{O_1A_1} = 0,6 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \implies \overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \quad ; \text{ A.N : } \overline{A_1B_1} = -16 \text{ mm.}$$

L'image A_1B_1 se comporte pour L_2 comme objet virtuel :

$$p_2 = \overline{O_2A_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1O_2} = +0,15 \text{ m}$$

L'image de A_1B_1 par L_2 sera $A'B'$ tel que :

$$\frac{1}{O_2 F_2'} = \frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A_1} \Rightarrow \frac{1}{O_2 A'} = \frac{1}{O_2 F_2'} + \frac{1}{O_2 A_1} \Rightarrow \overline{O_2 A'} = \frac{\overline{O_2 F_2'} \cdot \overline{O_2 A_1}}{\overline{O_2 F_2'} + \overline{O_2 A_1}}$$

$$A.N : \overline{O_2 A'} = \frac{0,5 \times 0,15}{0,5 + 0,15} = 0,115 \text{ m} \text{ d'où: } \overline{O_1 A'} = 0,565 \text{ m}$$

$$\text{La formule de grandissement s'écrit } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{O_2 A_1'}}{\overline{O_2 A_1}}$$

$$\text{On en déduit : } \overline{A'B'} = \overline{A_1 B_1} \cdot \frac{\overline{O_2 A_1'}}{\overline{O_2 A_1}}$$

$$A.N : \overline{A'B'} = -12,3 \text{ mm}$$

L'image définitive donnée de AB par le système (L_1 , L_2) est A'B' renversée, de longueur égale à 12,3 mm, située à 11,5 cm de L_2 (donc à 56,5 cm de L_1).

Evaluons l'écart relatif entre les résultats trouvés graphiquement et les résultats obtenus par calcul : nous supposons que les résultats trouvés grâce au calcul sont exacts

$$* \text{ pour } O_1 A' : \left| \frac{0,57 - 0,565}{0,565} \right| \approx 0,009 = 0,9 \%$$

$$* \text{ pour } A'B' : \left| \frac{12 - 12,3}{12,3} \right| \approx 0,024 = 2,4 \%$$

Exercice n° 6

L'objectif d'un appareil photographique est équivalent à une lentille mince convergente de distance focale $f = 12 \text{ cm}$.

1) On règle la position de l'objectif pour obtenir sur le film (pellicule) une image nette d'objets réels très éloignés (distance pratiquement infinie). De combien et dans quel sens doit-on déplacer l'objectif pour obtenir sur le film une image nette d'un objet réel situé à 8 m de l'objectif ?

2) On photographie l'objet réel situé à 8 m de l'objectif sans avoir effectué le déplacement de l'objectif et l'appareil est resté réglé sur l'infini. On accepte la netteté de l'image tant que la dimension de l'image d'un point objet situé sur l'axe principal ne dépasse pas 0,1 mm. Que doit être la valeur maximale du diamètre d'ouverture de l'objectif pour que l'image de l'objet considéré soit acceptable ?

Corrigé

1) Lorsque l'objet réel est très éloigné de l'objectif, on peut pratiquement écrire $p = -\infty$; la formule de conjugaison donne alors :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \approx \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = f$$

L'image de l'objet réel très éloigné est donc située dans le plan focal image de la lentille. Initialement, l'objectif de l'appareil photographique est à $f = 12 \text{ cm}$ de la pellicule.

Considérons alors un objet réel situé à 8 m de l'objectif ($p = -8 \text{ m}$)

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p + f}$$

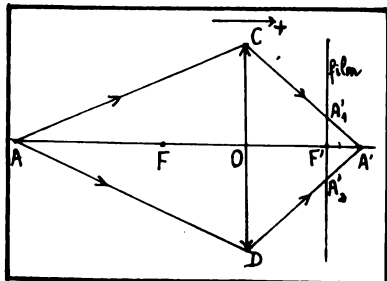
La distance entre le centre optique de l'objectif et l'image est:

$$p' = \frac{-8 \times 0,12}{-8 + 0,12} = 0,1218 \text{ m}$$

Il faut donc déplacer l'objectif de $0,0018 \text{ m} = 1,8 \text{ mm}$ dans le sens qui l'éloigne du film pour obtenir sur ce film une image nette de l'objet situé à 8 m de l'objectif.

2) L'appareil photographique est réglé sur l'infini, donc le film se trouve à la distance $f = 12 \text{ cm}$ du centre optique de l'objectif.

Soit un point objet A sur l'axe principal de l'objectif tel que $OA = -8 \text{ m}$. L'image de ce point A est le point image A' sur l'axe principal, à $OA' = 0,1218 \text{ m}$.



Cette image ne se forme pas réellement car les rayons qui émergent de l'objectif sont interceptés par le film avant leur convergence en A'. On obtient ainsi sur le film une tache image $A_1 A_2$. Considérons les rayons incidents AC et AD qui frappent sur les bords C et D de l'objectif (CD est alors le diamètre utile de l'objectif) et considérons les rayons émergents correspondants. Appliquons le théorème de Thalès pour les triangles $A_1 A_2 A'$ et $A'CD$.

$$\frac{A_1 A_2}{CD} = \frac{A'F'}{A'O} \Rightarrow CD = A_1 A_2 \cdot \frac{A'O}{A'F'}$$

On veut que $A_1 A_2$ soit inférieur ou égal à $0,1 \text{ mm}$ donc le diamètre utile CD de l'objectif doit être inférieur ou égal à :

$$d = 0,1 \text{ mm} \times \frac{0,1218 \text{ m}}{0,0018 \text{ m}} = 6,76 \text{ mm}$$

Exercice n° 7

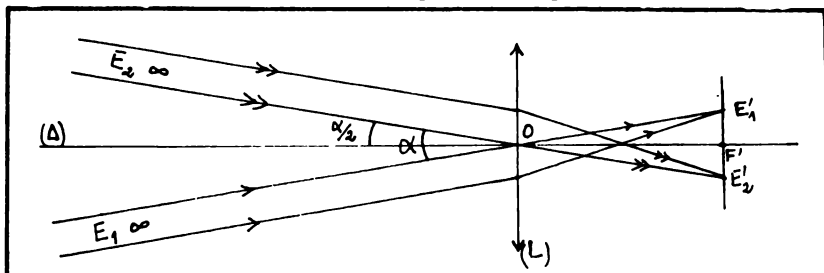
La distance entre les points images E'_1 et E'_2 de deux étoiles est $d = 3,6 \text{ mm}$ dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale $f = 15 \text{ m}$; E'_1 et E'_2 sont symétriques par rapport à l'axe principal de la lentille. Calculer la distance angulaire $\widehat{E_1 O E_2}$ des deux étoiles, O étant le centre optique de la lentille.

REMARQUE : La distance focale, de valeur très grande, est celle d'un objectif d'une grande lunette astronomique d'observatoire.

Corrigé

Construisons les images des deux étoiles E_1 et E_2 : les deux étoiles étant à des distances pratiquement infinies de l'objectif, les rayons qui en proviennent sont parallèles. Un rayon passant par le centre optique O de l'objectif (L) traverse la lentille sans déviation, un rayon qui lui est parallèle se

coupe avec le rayon précédent en un foyer secondaire image et l'intersection obtenue est le point image recherché.



Les deux images E'_1 et E'_2 étant symétriques par rapport à l'axe principal (Δ) de la lentille (L), les rayons incidents issus de E_1 et E_2 sont inclinés d'un même angle par rapport à cet axe principal. Soit $\frac{\alpha}{2}$ l'angle que fait un rayon incident avec l'axe (Δ), on a :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{F'E'_1}{OF'} \quad \text{A.N : } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{15} = 1,2 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{d'où } \frac{\alpha}{2} = 1,2 \times 10^{-4} \text{ rad} = 6,87 \times 10^{-3} \text{ degré} = 0,41'$$

La distance angulaire des deux étoiles est $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 0,82'$
(Rappelons que ($'$) est le symbole de la minute d'angle qui est égale à $\frac{1^\circ}{60}$)

Exercice n° 8

Un appareil de projection de diapositives est muni d'une lentille convergente de distance focale $f = 10$ cm. Il donne d'une diapositive rectangulaire (de dimensions 36 mm et 24 mm) une image nette sur un écran situé à 6 m de la lentille.

1) Quelles sont, dans ces conditions, la distance entre la lentille et la diapositive (à 0,1 mm près) et les dimensions de l'image obtenue ?

2) On rapproche l'écran jusqu'à le rendre à 2 m de la lentille. De combien et dans quel sens faut-il déplacer cette lentille pour avoir une image nette sur l'écran dans sa nouvelle position ?

Corrigé

1) Soient O le centre optique de la lentille de l'appareil de projection, A un point objet réel (de la diapositive) sur l'axe principal et A' le point image donné de A par la lentille (A' est aussi sur l'axe principal).

Avec $\overline{OF'} = f > 0$, $p = \overline{OA} < 0$ (objet réel) et $p' = \overline{OA'} > 0$ (image réelle), on a :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{f} \Rightarrow p = \frac{p' \cdot f}{f - p'} = -0,1017 \text{ m}$$

La distance entre la lentille et la diapositive est 101,7 mm, nous donnons le résultat à 0,1 mm près, car si nous prenions

$p = -0,101$ m, cela correspondrait à $p' = 10$ m, et si nous prenions $p = -0,102$ m, cela correspondrait à $p' = 5,1$ m !
Calculons les dimensions de l'image obtenue : Pour cela, utilisons la formule de grandissement :

$\gamma = \frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$, i et o étant respectivement les mesures algébriques respectives de l'image et de l'objet dans un repère (O, j) perpendiculaire à l'axe principal de la lentille. Soit AB la longueur de la diapositive, l'image a pour longueur $A'B'$ telle que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{p'}{p} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{p'}{p} ; \overline{A'B'} = 3,6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{6}{-0,1017} = -2,12 \text{ m}$$

Soit CD la largeur de la diapositive, l'image a pour largeur $C'D'$ telle que :

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{p'}{p} \Rightarrow \overline{C'D'} = \overline{CD} \cdot \frac{p'}{p} ; \overline{C'D'} = 2,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{6}{-0,1017} = -1,42 \text{ m}$$

Le signe - dans les mesures algébriques $\overline{A'B'}$ et $\overline{C'D'}$ signifie que l'image observée sur l'écran est renversée par rapport à l'objet : Pour obtenir une image correcte, il faut placer la diapositive à l'envers.

2) On rapproche l'écran, on a maintenant $p'_1 = 2$ m.

Appliquons de nouveau la formule de conjugaison des lentilles sphériques minces :

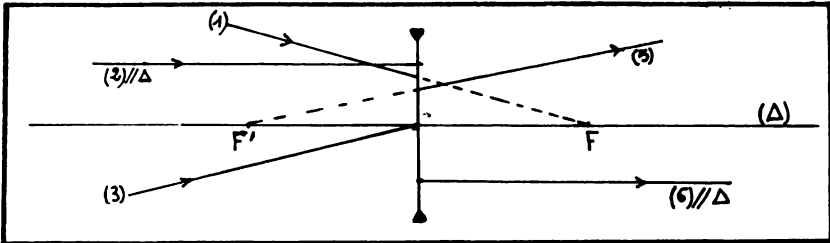
$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow p_1 = \frac{p'_1 \cdot f}{f - p'_1} = \frac{2 \times 0,1}{0,1 - 2} \doteq -0,1053 \text{ m}$$

La lentille est éloignée de la diapositive à partir de la position précédente de : $0,1053 - 0,1017 = 0,0036 \text{ m} = 3,6 \text{ mm}$.

2- LENTILLES DIVERGENTES

Exercice n° 1

Représenter les rayons incidents et les rayons émergents qui correspondent aux rayons tracés sur la figure suivante :

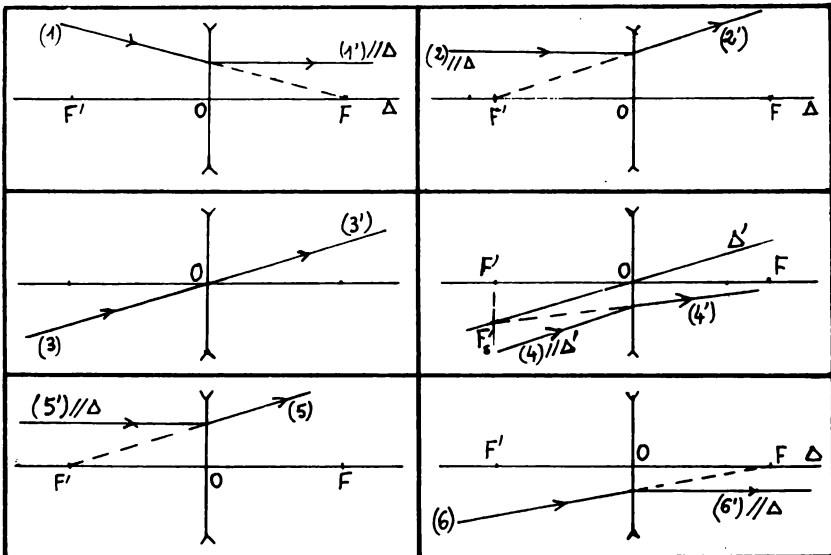


On utilisera une figure à part pour chaque rayon considéré.

Corrigé

- * Un rayon incident parallèle à l'axe principal donne un rayon émergent semblant provenir de F' , foyer principal image.
- * Un rayon incident passant par le centre optique O de la lentille ne subit pas de déviation.
- * Un rayon incident dont le prolongement passe par le foyer principal objet F émerge parallèlement à l'axe principal.
- * Un rayon incident parallèle à un axe secondaire (Δ') émerge en semblant provenir de F'_s intersection de cet axe secondaire avec le plan focal image.

Ces considérations nous permettent de faire la construction des rayons émergents ou incidents demandés :



Si nous considérons pour chaque cas le faisceau incident formé par le rayon incident construit ou donné et un rayon $F'O$, nous remarquons que la lentille divergente augmente la divergence ou diminue la convergence. Ainsi un faisceau convergent $\rightarrow$ faisceau

parallèle ou divergent ou convergent mais moins que l'incident;
un faisceau parallèle → un faisceau divergent

Exercice n° 2

Répondre aux questions suivantes, en utilisant uniquement la relation de conjugaison des lentilles minces :

1) Une lentille divergente peut-elle donner une image réelle d'un objet réel ?

2) Une lentille divergente peut-elle donner une image réelle d'un objet virtuel ?

3) Une lentille divergente peut-elle donner une image virtuelle d'un objet virtuel ?

Indiquer, s'il y a lieu, la condition à remplir.

Corrigé

Nous disposons d'une lentille divergente. Soient O le centre optique de la lentille, A un point objet sur l'axe principal de la lentille et A' le point image de A par la lentille (A' est aussi sur l'axe principal de la lentille).

Posons $\overline{OA} = p$ et $\overline{OA'} = p'$ dans le repère $(O, \vec{i})$ orienté dans le sens de la propagation de la lumière.

La relation de conjugaison s'écrit :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{f} \quad (\overline{OF'} < 0, \text{ lentille divergente}).$$

1) Si l'image était réelle et l'objet était réel aussi, on aurait: $p' > 0$ et $p < 0$ donc $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} > 0$, or $-\frac{1}{f} < 0$. La relation de conjugaison est impossible à vérifier, une lentille divergente ne donne jamais une image réelle d'un objet réel.

2) Pouvons-nous obtenir une image réelle d'un objet virtuel ? Si oui, on aurait : $p > 0$ et $p' > 0$; la formule de position $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{f} < 0$ est vérifiée si et seulement si

$p' = \frac{p \cdot f}{-p + f}$ est positive ; or $p \cdot f > 0$, donc il faut que

$f - p > 0$ soit: $f > p$. L'objet virtuel doit être entre la lentille divergente et son plan focal objet pour que cette lentille en donne une image réelle.

3) La lentille divergente peut-elle donner une image virtuelle d'un objet virtuel ? Si oui, on aurait $p > 0$ et $p' < 0$.

La relation de conjugaison $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{f} < 0$ est vérifiée

à condition que $p' = \frac{p \cdot f}{-p + f}$ soit négative.

Or $p \cdot f > 0$, il faut donc que $f - p$ soit négative: $f < p$

L'objet virtuel doit être au-delà du plan focal objet de la lentille divergente pour qu'elle en donne une image virtuelle.

Exercice n° 3

1) Déterminer en utilisant la formule de conjugaison, la nature (réel ou virtuel) et la position des points objets A_1 et A_2 situés sur l'axe principal d'une lentille divergente de distance focale $f = 10$ cm , sachant que cette lentille donne respectivement :

- une image réelle A'_1 située à 12 cm du centre optique de la lentille,
- une image virtuelle A'_2 située à 6 cm du centre optique de la lentille.

2) Faire une construction géométrique très soignée de ces images à l'échelle 1/2 en utilisant les données de la première question et les résultats de sa résolution. On considérera pour chaque point objet deux rayons lumineux particuliers qui en sortent.

Corrigé

1) Déterminons par le calcul, à partir de la formule de conjugaison, la position des points objets dont l'énoncé fournit la position des points images correspondants.

** $p'_1 = + 0,12$ m (image A'_1 réelle située à 12 cm de O, centre optique de la lentille) :

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = -\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{f} \Rightarrow p_1 = \frac{f \cdot p'_1}{f + p'_1}$$

$$A.N : p_1 = \frac{0,1 \times 0,12}{0,1 + 0,12} = 0,055 \text{ m} > 0 \text{ (objet virtuel).}$$

L'objet A_1 est virtuel situé à 5,5 cm en avant de la lentille.

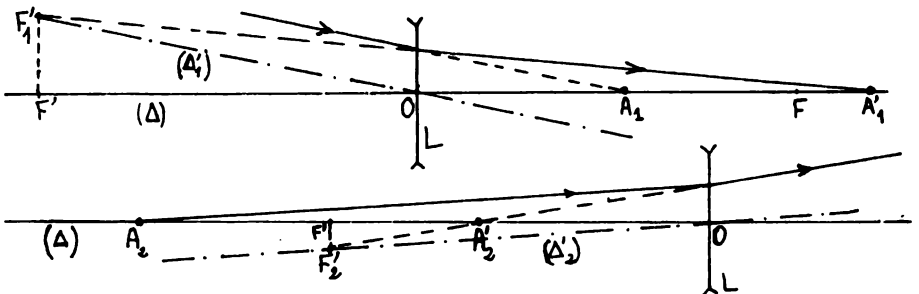
** $p'_2 = - 0,06$ m (image A'_2 située à 6 cm de O) :

Un calcul analogue au précédent donne :

$$p_2 = \frac{f \cdot p'_2}{f + p'_2} = \frac{0,1 \times - 0,06}{0,1 - 0,06} = - 0,15 \text{ m}$$

L'objet A_2 est réel ($p < 0$) , il est situé à 15 cm de O.

2) Construisons géométriquement les images A'_1 et A'_2 à l'échelle 1/2 : Pour chaque cas, nous considérons un rayon incident passant par le centre optique O de la lentille et un rayon incident parallèle à un axe secondaire de la lentille. Le premier rayon émerge sans subir de déviation, le deuxième émerge en provenant d'un foyer image secondaire, intersection du plan focal image avec l'axe secondaire considéré.



Exercice n° 4

Une lentille divergente de distance focale $f = 30$ cm et de diamètre $d = 3$ cm reçoit un faisceau lumineux incident cylindrique de diamètre $d' = 3$ cm parallèlement à l'axe principal de la lentille. Déterminer la position d'un écran perpendiculaire à l'axe principal, pour laquelle on obtient sur cet écran une tache lumineuse circulaire de diamètre $D = 5$ cm.

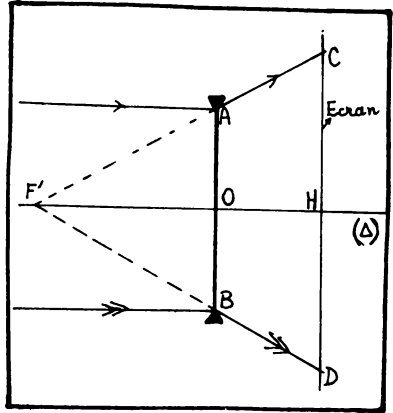
Corrigé

Le faisceau incident parallèle à l'axe principal de la lentille divergente émerge de cette lentille en provenant virtuellement du foyer principal image F' .

Soient A et B les bords de la lentille (c-à-d les extrémités du diamètre de la lentille représenté sur la figure) et C et D les bords du faisceau émergent sur l'écran. Appliquons le théorème de Thalès pour les triangles $F'AB$ et $F'CD$:

$$\frac{F'O}{F'H} = \frac{AB}{CD} \implies F'H = \frac{F'O \cdot CD}{AB}$$

$$\text{A.N : } F'H = \frac{0,30 \times 0,05}{0,03} = 0,50 \text{ m.}$$



La position de l'écran par rapport à la lentille est donnée par :

$$\overline{OH} = \overline{F'H} - \overline{F'O}$$

$$\text{A.N : } \overline{OH} = 0,50 - 0,30 = 0,20 \text{ m.}$$

L'écran doit être à 20 cm en avant de la lentille pour qu'on y obtienne une tache lumineuse circulaire de diamètre égal à 5 cm

3- VERGENCE ; ASSOCIATION DE LENTILLES

Exercice n° 1

Montrer que pour une lentille mince plan convexe, la vergence est donnée par la formule:

$$V = (n - 1) \cdot \frac{1}{R}$$

(n étant l'indice de réfraction du milieu transparent constituant la lentille qui se trouve dans l'air et R étant le rayon de courbure de la face convexe).

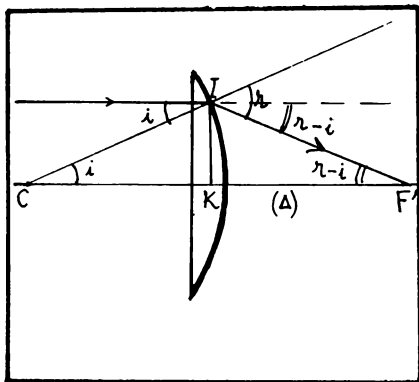
Il ne s'agit pas pour cet exercice de remplacer R_2 par l'infini dans la formule de cours $V = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, mais plutôt de considérer un rayon incident parallèle à l'axe principal, au voisinage de cet axe principal, de construire le rayon émergent correspondant puis d'établir la relation :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \frac{1}{R}$$

Corrigé

Soit un rayon lumineux incident parallèle à l'axe principal (Δ) de la lentille. Ce rayon traverse la face plane sans aucune déviation (incidence normale: l'angle que fait le rayon incident avec la normale à la surface de séparation air-milieu transparent de la lentille est nul, donc l'angle de réfraction est aussi nul).

Le rayon considéré traverse ensuite la face convexe en déviant vers le foyer principal image F' . La normale en I à la face sphérique passe par le centre C de la sphère à laquelle appartient la face considérée.



La loi de Descartes pour la réfraction s'écrit :

$n \cdot \sin i = 1 \times \sin r$ (n étant l'indice de réfraction du milieu transparent de la lentille et 1 étant l'indice de réfraction de l'air).

Nous travaillons dans les conditions de Gauss, nous ne considérons donc que des rayons très peu inclinés par rapport à l'axe principal : Par conséquent, les angles i et r sont très petits d'où $\sin i \approx i$ (rad) et $\sin r \approx r$ (rad). Les angles i et r vérifient ainsi la relation $r \approx n \cdot i$

Exprimons IK des deux manières suivantes :

$$IK = IC \sin \hat{ICK} = IC \sin i \approx R \cdot i$$

$$IK = KF' \cdot \operatorname{tg} (r - i)$$

La lentille étant mince, K est pratiquement confondu avec le centre optique O de la lentille. D'autre part, les angles i et r étant petits, $\operatorname{tg} (r - i) \approx r - i$ (en radians)

d'où $IK \approx OF'$. $(r - i) = f. (n - 1)$

Egalisons les deux expressions obtenues pour la distance IK :

$$IK = R. i = f. (r - i) = f. i. (n - 1)$$

Finalement : $\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{1}{R}$

Nous remarquons que cette formule constitue un cas particulier de la formule plus générale donnant la vergence d'une lentille sphérique mince :

$$V = \frac{1}{OF'} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

avec $OF' = f > 0$ (lentille convergente), $R_1 = + R$ (face convexe) et $R_2 = \infty$ (face plane)

Exercice n° 2

1) Une lentille convergente L_1 de centre optique O_1 a une distance focale $f_1 = 6$ cm. Un objet vertical AB haut de 10 m est placé à 100 m de L_1 , le point A étant sur l'axe principal de L_1 . Déterminer la position et la grandeur de l'image de AB donnée par L_1 .

2) Entre la lentille L_1 et son foyer principal image, on place une lentille divergente L_2 de centre optique O_2 et de distance focale $f_2 = 3,5$ cm, à $\overline{O_1 O_2} = + 3$ cm de L_1 . Déterminer la position et la grandeur de l'image définitive de AB donnée par le système (L_1, L_2) . Déterminer la distance qui sépare la lentille L_1 et le plan sur lequel se forme l'image définitive.

3) Si on avait utilisé une seule lentille convergente L_3 (dans la position qu'occupait L_1) en remplacement du système (L_1, L_2) , qu'auraient été la distance focale f_3 de L_3 et la distance entre L_3 et le plan sur lequel se forme l'image pour que l'image de AB par L_3 soit de même longueur que l'image de AB par le système (L_1, L_2) ?

Corrigé

1) Utilisons la formule de conjugaison des lentilles pour obtenir la position de l'image $A_1 B_1$ donnée par L_1 de l'objet AB

$$\frac{1}{O_1 F'_1} = \frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} \implies \overline{O_1 A_1} = \frac{\overline{O_1 F'_1} \cdot \overline{O_1 A}}{\overline{O_1 F'_1} + \overline{O_1 A}}$$

A.N : $\overline{O_1 A_1} = \frac{0,06 \times (-100)}{0,06 - 100} \approx 0,06$ m

L'image $A_1 B_1$ est pratiquement dans le plan focal image de la lentille L_1 . Ce résultat est logique car pour une lentille de distance focale égale à 6 cm, une distance lentille-objet de 100 m représente une distance pratiquement infinie.

Calculons la longueur de l'image $A_1 B_1$. Pour cela, appliquons la formule de grandissement :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} \implies \overline{A_1 B_1} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}}$$

A.N : $\overline{A_1 B_1} = 10 \times \frac{0,06}{-100} = -0,006$ m $\implies A_1 B_1 = 6$ mm

Nous obtenons donc par L_1 une image $A_1 B_1$ réelle, renversée, mesurant 6 mm de hauteur et située dans le plan focal image de

cette lentille.

2) La lentille L_2 intercepte les rayons qui formaient l'image A_1B_1 : cette image A_1B_1 joue alors le rôle d'objet virtuel pour la lentille L_2 .

La position de l'objet virtuel A_1B_1 par rapport à L_2 est telle que $\overline{O_2A_1} = +3 \text{ cm}$. La lentille L_2 donne de A_1B_1 une image $A'B'$ dont la position est déterminée grâce à la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}} \implies \overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \cdot \overline{O_2F_2'}}{\overline{O_2A_1} + \overline{O_2F_2'}}$$

$$\text{A.N : } \overline{O_2A'} = \frac{0,03 \times (-0,035)}{0,03 - 0,035} = +0,21 \text{ m}$$

Le signe $+$ de $\overline{O_2A'}$ signifie que l'image $A'B'$ est réelle. La hauteur de l'image $A'B'$ est donnée par la formule de grandissement :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \implies \overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$$

$$\text{A.N : } \overline{A'B'} = -0,006 \times \frac{0,21}{0,03} = -0,042 \text{ m}$$

L'image $A'B'$ est droite par rapport à A_1B_1 donc elle est renversée par rapport à l'objet réel AB .

L'image définitive de AB , donnée par le système (L_1, L_2), est réelle, renversée, de longueur égale à 4,2 cm; elle est située

à $\overline{O_1A'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A'} = 0,24 \text{ m}$. La distance $\overline{O_1A'}$ représente l'encombrement du dispositif puisque c'est la longueur comprise entre la première lentille et le plan sur lequel se forme l'image définitive.

3) Remplaçons le système des deux lentilles (L_1, L_2) par une seule lentille convergente L_3 dans la position de L_1 pour obtenir une image réelle, renversée et mesurant 4,2 cm.

Soit $A''B''$ cette image, on a $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_3A''}}{\overline{O_3A}} \implies \overline{O_3A''} = \overline{O_3A} \cdot \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = -100 \times \frac{-0,042}{10} = +0,42 \text{ m}$$

La distance entre la lentille L_3 et le plan sur lequel se forme l'image $B''A''$ est de 0,42 m. Or la distance entre AB et L_3 est pratiquement infinie ($\overline{O_3A} = 100 \text{ m}$) donc l'image $A''B''$ se forme dans le plan focal image de L_3 . Nous en déduisons que $\overline{O_3A''}$ est pratiquement égale à la distance focale de L_3 .

$$f_3 = 0,42 \text{ m.}$$

La distance de 42 cm séparant L_3 et le plan où se forme l'image est nettement supérieure à la distance entre L_1 et le plan de l'image dans le dispositif envisagé au "2)". Ainsi le dispositif associant une lentille divergente à une lentille convergente (L_1, L_2) est moins encombrant que le dispositif utilisant une seule lentille convergente et donnant la même grandeur d'image. Le dispositif (L_1, L_2) constitue le **téléobjectif** photographique utilisé pour la photographie des objets éloignés.

Exercice n° 3

Pour déterminer la distance focale f_2 d'une lentille divergente L_2 , on l'accrole à une lentille convergente L_1 de distance focale $f_1 = 15$ cm. Le système optique obtenu est convergent. Lorsque ce système donne d'un objet réel une image réelle avec un grandissement $\gamma = -1$, la distance entre l'objet et l'image est 76 cm. En déduire f_2 .

Corrigé

Soit f la distance focale du système optique formé par les lentilles L_1 et L_2 accolées. Soit un objet réel AB perpendiculaire à l'axe principal (Δ) des deux lentilles, et $A'B'$ l'image de AB par le système (L_1, L_2). Les lentilles étant très minces, le centre optique O du système (L_1, L_2) est pratiquement confondu avec les centres optiques O_1 et O_2 des deux lentilles. On a alors :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \gamma \text{ et } \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$$

Par conséquent, si $\gamma = -1$, $\overline{OA'} = -\overline{OA}$ d'où :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{2}{\overline{OA'}} \text{ d'où : } \overline{OA'} = 2 \overline{OF'}$$

La distance entre l'objet et l'image est :

$$D = |\overline{AA'}| = |\overline{OA'} - \overline{OA}| = 4 \cdot |\overline{OF'}|$$

Nous en déduisons la distance focale f du système (L_1, L_2) :

$$|\overline{OF'}| = f = \frac{|\overline{AA'}|}{4} ; \quad \text{A.N: } f = \frac{0,76 \text{ m}}{4} = 0,19 \text{ m}$$

Les deux lentilles étant accolées, on a :

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OF_1}} + \frac{1}{\overline{OF_2}} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$$

La distance focale de la lentille L_2 est donc f_2 tel que :

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f} \Rightarrow f_2 = \frac{f \cdot f_1}{f - f_1}$$

$$\text{A.N: } f_2 = \frac{0,19 \times 0,15}{0,19 - 0,15} = 0,71 \text{ m}$$

Exercice n° 4

1) Une lentille mince convergente L_1 a la forme plan-convexe. Le rayon de courbure de la face convexe est 20 cm et l'indice de réfraction du verre de cette lentille est $n = 1,5$. Calculer la distance focale f_1 de la lentille L_1 .

2) On accole à L_1 une lentille L_2 biconcave dont une face adhère exactement à la face convexe de L_1 et l'autre face a pour rayon 30 cm. Quelles sont les vergences et les distances focales de la lentille L_2 et du système (L_1, L_2 accolées) sachant que les deux lentilles sont faites du même verre d'indice de réfraction $n = 1,5$.

Corrigé

1) Considérons la lentille convergente L_1 . Appliquons la formule donnant la vergence d'une lentille mince sphérique :

$$V_1 = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right)$$

R_1 = rayon de la face convexe = + 0,20 m

R'_1 = ∞ (rayon de la face plane).

$$\text{donc } \frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R_1} \quad \text{et} \quad f_1 = \frac{R_1}{n-1}$$

$$\text{A.N : } V_1 = 2,5 \text{ m}^{-1} \text{ (ou } \delta \text{)} \quad \text{et} \quad f_1 = 0,4 \text{ m}$$

2) La lentille L_2 est biconcave donc les rayons de ses deux faces seront comptés négativement.

La 1^{ère} face de L_2 adhère exactement à la face convexe de L_1 , donc le rayon de cette face est : $R_2 = -R_1 = -0,20 \text{ m}$

Le rayon de la 2^{ème} face est $R'_2 = -0,30 \text{ m}$

$$\text{La vergence de } L_2 \text{ est : } V_2 = -\frac{1}{f_2} = (n-1) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right)$$

$$V_2 = (n-1) \cdot \frac{R_2 + R'_2}{R_2 \cdot R'_2} = -4,16 \delta.$$

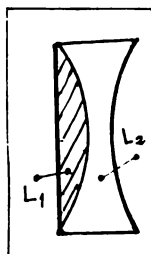
$$\text{La distance focale de } L_2 \text{ est } f_2 = -\frac{1}{V_2} = 0,24 \text{ m.}$$

La vergence du système (L_1 , L_2 accolées) est:

$$V_S = V_1 + V_2 = -1,66 \delta$$

La vergence V_S est négative, donc le système optique des deux lentilles accolées est divergent, sa distance focale est $f_S = -\frac{1}{V_S} = 0,6 \text{ m.}$

Le système obtenu est plan-concave.



Exercice n° 5

Un objectif photographique est formé de deux lentilles minces accolées : l'une en crown (verre d'indice de réfraction $n_1 = 1,52$) est convergente biconvexe, l'autre en flint (verre d'indice de réfraction $n_2 = 1,68$) est divergente en forme de ménisque convexe-concave. Les rayons de courbure sont égaux entre eux pour les deux faces de la lentille biconvexe et pour la face concave de la lentille divergente mais la face libre de cette dernière a un rayon double de celui de l'autre face.

Sachant que le système optique formé par les deux lentilles accolées est convergent de distance focale $f = 15 \text{ cm}$, calculer:

- 1) le rayon de courbure des faces de la lentille biconvexe.
- 2) les distances focales des deux lentilles.

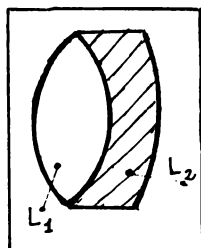
Corrigé

1) La lentille biconvexe L_1 a deux faces de même rayon de courbure, compté positivement dans la formule de la vergence.

$$V_1 = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = (n_1 - 1) \frac{2}{R}$$

$$L_1 \text{ est convergente, donc } V_1 = + \frac{1}{f_1}$$

La lentille L_2 , divergente, est en forme de ménisque concave-convexe. La face concave de L_2 adhère à une face de L_1 , donc son rayon est égal à $-R$; la face convexe (libre) de L_2 a



a pour rayon $2R$.

La vergence de L_2 est : $V_2 = (n_2 - 1) \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) = -\frac{n_2 - 1}{2R}$

L'objectif photographique considéré est formé par L_1 et L_2 accolées, donc sa vergence est :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2(n_1 - 1)}{R} - \frac{(n_2 - 1)}{2R} = \frac{1}{2R} \cdot (4n_1 - 4 - n_2 + 1)$$

$$V = \frac{1}{2R} \cdot (4n_1 - n_2 - 3) = +\frac{1}{f} \text{ (système convergent donc } V > 0 \text{)}.$$

Nous déduisons le rayon de courbure R des faces de L :

$$R = \frac{f(4n_1 - n_2 - 3)}{2} \implies R = 0,105 \text{ m.}$$

2) Calculons les distances focales des deux lentilles :

$$V_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2(n_1 - 1)}{R} \implies f_1 = \frac{R}{2(n_1 - 1)} = 0,101 \text{ m}$$

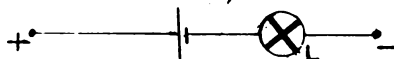
$$V_2 = -\frac{1}{f_2} = -\frac{(n_2 - 1)}{2R} \implies f_2 = \frac{2R}{n_2 - 1} = 0,309 \text{ m}$$

IV-ELECTRONIQUE

TRANSISTOR

Exercice n° 1

On dispose de quatre transistors (T_1 , T_2 , T_3 et T_4) dont on ignore le type (NPN ou PNP) et l'état des jonctions (état normal ou défaut par coupure ou défaut par court-circuit). On utilise alors un dipôle formé d'une pile en série avec une lampe L entre deux bornes (+) et (-). Les essais effectués et les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant (B, C et E désignant respectivement la base, le collecteur et l'émetteur du transistor.



	T_1	T_2	T_3	T_4
(+) à B (-) à E	L allumée	L éteinte	L éteinte	L allumée
(+) à E (-) à B	L allumée	L allumée	L éteinte	L éteinte
(+) à B (-) à C	L allumée	L éteinte	L éteinte	L allumée
(+) à C (-) à B	L allumée	L allumée	L éteinte	L éteinte

1) Déterminer l'état de chaque jonction dans les quatre transistors.

2) Indiquer, quand cela est possible, le type du transistor. Si ce n'est pas possible, indiquer pourquoi.

3) Pour quel(s) transistor(s) parmi les quatre considérés, aura-t-on L allumée en reliant la borne (+) à C et la borne (-) à E ? justifier la réponse.

Corrigé

Soit le dipôle générateur D.G formé par la pile et la lampe L. Nous considérerons successivement les quatre transistors et nous répondrons au trois questions pour chacun.

A// TRANSISTOR T_1 :

* B à (+) et E à (-), le courant passe, cela nous fait penser que B est P, que E est N et que T_1 est du type NPN.

* B à (-) et E à (+), le courant passe aussi, donc la supposition précédente n'est pas confirmée: la jonction BE est court-circuitée, peut-être c'était une PN ou une NP.

* Les deux essais suivants donnent le même résultat pour la jonction BC: le courant passe avec B à (+) et C à (-) et avec les connexions inverses, donc BC est aussi court-circuitée, c'est possible qu'elle était une PN ou une NP avant son court-circuitage.

Conclusion : T_1 est un transistor détérioré, ses deux jonctions sont court-circuitées, nous ne pouvons rien affirmer quant à son type.

Si on relie C à (+) et E à (-), le courant passe car chaque jonction court-circuitée équivaut à un conducteur et cela nous donne deux conducteurs en série entre C et E.

B// TRANSISTOR T_2 :

B à (+) et E à (-) : $I = 0$

B est N ; E est P

B à (-) et E à (+) : $I \neq 0$

B à (+) et C à (-) : $I = 0$

B est N ; C est P

B à (-) et C à (+) : $I \neq 0$

Le transistor T_2 est du type PNP et ses deux jonctions sont en bon état.

Si on relie C à (+) et E à (-), on aura pour l'une des jonctions un P (qui est E) au (-) donc le courant ne passera pas.

C// TRANSISTOR T_3 :

Le transistor T_3 a donné un résultat négatif pour les quatre essais donc les deux jonctions BC et BE sont coupées. Il est impossible de savoir de quelle nature était le transistor avant sa détérioration.

Si on relie C à (+) et E à (-), on obtient deux jonctions coupées en série, donc le courant ne passera pas: L sera éteinte.

D// TRANSISTOR T_4 :

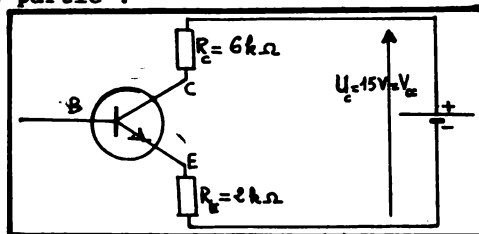
Le transistor T_4 a laissé passer le courant quand (+) est relié à B et (-) est relié à C ou E ; le transistor T_4 n'a pas laissé passer le courant quand (-) est reliée à B et (+) est reliée à C ou E , donc la base est P alors que le collecteur et l'émetteur sont N :

T est un transistor NPN en bon état.

Si on relie C à (+) et E à (-), on aura une jonction NP pour laquelle N est au (+), donc le courant ne passera pas et la lampe L restera éteinte.

Exercice n° 2

On réalise un montage en émetteur commun, dont on représente ci-dessous une partie :



1) D'après le schéma, quel est le type de transistor utilisé ?

2) Déterminer l'équation de la droite de charge et tracer cette droite de charge.

Corrigé

1) D'après le schéma ci-contre le transistor utilisé est du type NPN.

La jonction BE est polarisée en direct et la jonction BC est polarisée en inverse.

Le courant passe dans le sens CBE.

2) Soit I_C l'intensité du courant qui passe dans le transistor. On a :

$$V_{CC} = R_C \cdot I_C + V_{CE} + R_E \cdot I_C$$

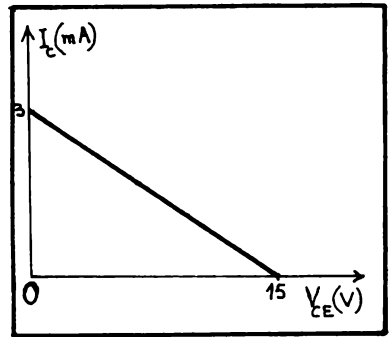
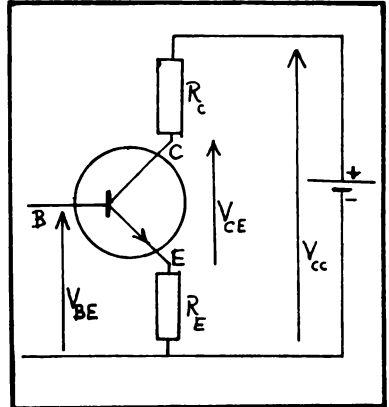
$$\text{D'où : } V_{CE} = V_{CC} - I_C (R_C + R_E)$$

$$\text{et } I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E}$$

Nous pouvons utiliser comme unités l'ampère, l'ohm et le volt ou le milliampère, le kilohm et le volt. Optons pour ce deuxième choix. Nous obtenons :

$$I_C \text{ (mA)} = 3 - \frac{V_{CE}}{5}$$

C'est l'équation de la droite de charge dont le graphe est représenté ci-contre.



Exercice n° 3

La tension de collecteur V_{CE} d'un transistor étant maintenue constante et égale à 4,5 V, on mesure le courant de collecteur I_C et le courant de base I_B en fonction de la tension de base V_{BE} . Les résultats sont les suivants :

$ V_{BE} $ (mV)	50	100	128	150	160	178	192	204
I_C (mA)	0	0,35	1	2	3	4	5	6
I_B (μ A)	0	6,4	18	36	55	73	92	109

1) Calculer le coefficient d'amplification en courant $\beta = \frac{I_C}{I_B}$ et le rapport de transfert de courant de ce transistor défini par $\alpha = \frac{I_C}{I_E} = \frac{\beta}{\beta + 1}$

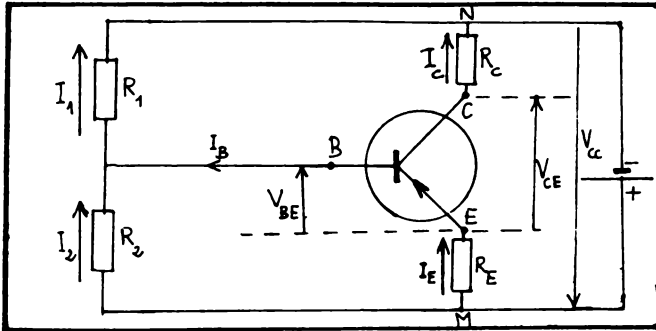
2) Le transistor précédent est monté en amplificateur d'après le schéma figurant à la fin de l'énoncé (les flèches indiquent le sens réel des courants et des tensions). On donne :

$$R_E = 560 \, \Omega ; R_C = 1000 \, \Omega ; V_{CC} = 9 \, \text{V} ; R = 4700 \, \Omega .$$

On règle R_1 de manière que la tension du collecteur soit telle

que $|V_{CE}| = 4,5 \text{ V}$. Indiquer le type de transistor (PNP ou NPN). Calculer I_C , I_B , I_E , $|V_{BE}|$, I_1 , I_2 et R_1 .

(Bac français, série F, 1970)



Corrigé

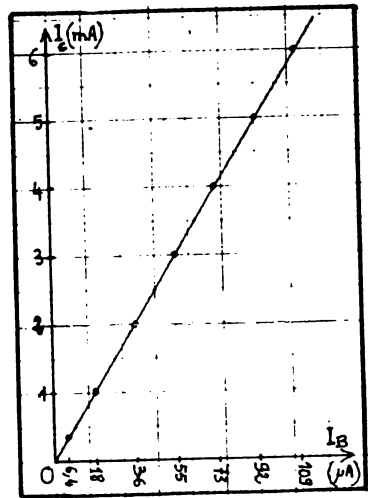
Utilisons le schéma ci-dessus, figurant à la fin de l'énoncé, et que l'élève est tenu de reproduire au début de la résolution.

1) Traçons la caractéristique $I_C = f(I_B)$ à V_{CE} constante, nous obtenons une droite passant par l'origine des axes. Le coefficient directeur de cette droite est le coefficient d'amplification

$$\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{(6 - 3) \cdot 10^{-3}}{(109 - 55) \cdot 10^{-6}} \approx 55$$

Le rapport de transfert de courant du transistor est :

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} = \frac{I_C}{I_C + I_B} = \frac{\frac{I_C}{I_B}}{\frac{I_C}{I_B} + 1} = \frac{\beta}{\beta + 1}$$



A.N : $\alpha = 0,98$

2) D'après le schéma du transistor, il s'agit d'un PNP. Considérons la maille de droite du schéma :

$$V_M - V_N = V_{cc} = R_E \cdot I_E + (V_E - V_C) + R_C \cdot I_C$$

Nous pouvons exprimer les résistances en kilohm et les intensités en milliampère et cela nous donne les tensions en volt.

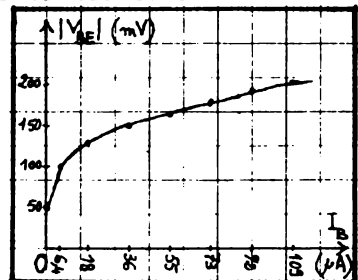
$$V_{cc} = R_E \frac{1}{\alpha} I_C + (V_E - V_C) + R_C \cdot I_C$$

$$\text{d'où : } I_C = \frac{V_{cc} - V_{EC}}{\frac{1}{\alpha} R_E + R_C} = 2,90 \text{ mA}$$

$$\text{On en déduit : } I_B = I_C / \beta = 0,053 \text{ (mA)}$$

$$I_E = I_C / \alpha = 2,96 \text{ mA}$$

Du graphe $|V_{BE}| = f(I_B)$, on déduit pour $I_B = 53 \mu\text{A}$, $|V_{BE}| = 158 \text{ mV}$



Considérons la maille de gauche contenant R_E et R_2 :

$$(V_M - V_E) + (V_E - V_B) + (V_B - V_M) = 0$$

$$R_E \cdot I_E + V_{EB} - R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$\text{D'où : } I_2 = \frac{R_E \cdot I_E + V_{EB}}{R_2} = 0,386 \text{ mA}$$

Ecrivons la loi des nœuds au point D : $I_B + I_2 = I_1$

$$\text{A.N : } I = 0,053 + 0,386 = 0,439 \text{ mA}$$

Déterminons la valeur de la résistance R_1 :

$$\text{On a : } V_D - V_M = R_1 I_1 \text{ et } V_D - V_M = (V_B - V_C) + R_C \cdot I_C$$

d'où :

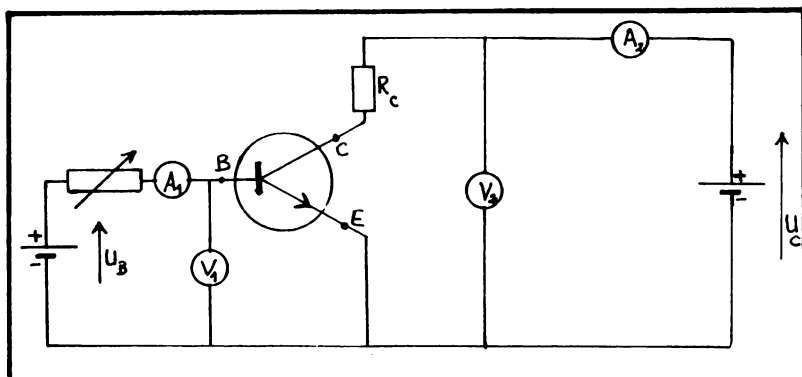
$$R_1 \cdot I_1 = (V_B - V_E) + (V_E - V_C) + R_C \cdot I_C$$

$$R_1 \cdot I_1 = -0,158 + 4,5 + (1 \times 2,90) = 7,242 \text{ V}$$

$$R_1 = \frac{7,242 \text{ V}}{0,439 \text{ mA}} \approx 16,5 \text{ k}\Omega$$

Exercice n° 4

On dispose d'un transistor NPN caractérisé par un coefficient d'amplification en courant $\beta = 130$ pour les petites intensités du courant de base. On réalise le montage suivant :



A_1 est un milliampèremètre utilisé sur le calibre 1 mA

A_2 est un milliampèremètre utilisé sur le calibre 100 mA

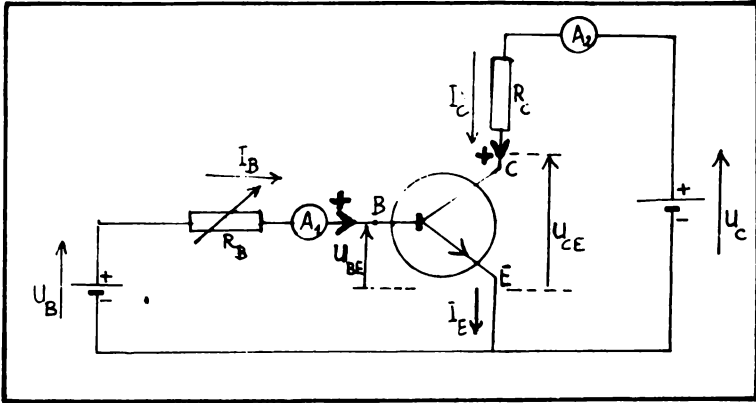
$U_B = +1,5 \text{ V}$; $U_C = +9 \text{ V}$; R_B = résistor à résistance réglable ; $R_C = 100 \Omega$; V_1 et V_2 : voltmètres de résistance très grande.

1) Refaire le schéma du montage avec les orientations pour les mailles (que l'on justifiera) et les sens réels des courants de base et de collecteur . En déduire les signes de I_B et de I_C .

2) Compléter, après avoir fait les calculs nécessaires, le tableau suivant :

I_B (mA)	I_C (mA)	U_{BE} (V)	U_{CE} (V)	R_B (k Ω)
0,2		0,67		
0,4		0,69		
0,6		0,71		

Corrigé



1) Nous orientons le transistor dans le sens CBE (de l'extérieur vers le transistor). La convention récepteur nous donne alors la tension U_{CE} . La jonction BE est polarisée en direct, la jonction BC est polarisée en inverse. Les sens des courants de collecteur et de base se confondent avec le sens (+) d'orientation des mailles, donc les intensités I_C et I_B sont positives.

2) Pour compléter le tableau :

a) On utilise le facteur d'amplification $\beta = \frac{I_C}{I_B}$, d'où $I_C = \beta I_B$

(avec $\beta = 130$)

b) Pour la maille de droite du schéma :

$$(V_M - V_N) + (V_N - V_C) + (V_C - V_E) = 0 \quad (V_E = V_M)$$

$$-U_C + R_C \cdot I_C + U_{CE} = 0 \quad U_{CE} = U_C - R_C I_C$$

c) Pour la maille de gauche du schéma :

$$(V_L - V_E) + (V_E - V_B) + (V_B - V_L) = 0$$

$$U_B - U_{BE} - R_B \cdot I_B = 0, \text{ d'où : } R_B = \frac{U_B - U_{BE}}{I_B}$$

Nous exprimons les tensions en volt, les intensités en milliampère, cela nous donne R_B en kilohm. Après avoir effectué le calcul numérique, nous obtenons le tableau suivant :

I_B (mA)	I_C (mA)	U_{BE} (V)	U_{CE} (V)	R_B (k Ω)
0,2	26	0,67	6,4	4,15
0,4	52	0,69	3,8	2,03
0,6	78	0,71	1,2	1,32

Exercice n° 5

Un transistor NPN est monté en émetteur commun avec une résistance de charge $R_C = 1\text{ k}\Omega$ et une tension d'alimentation V_{CC} égale à 10 V.

1) a) Schématiser le montage.

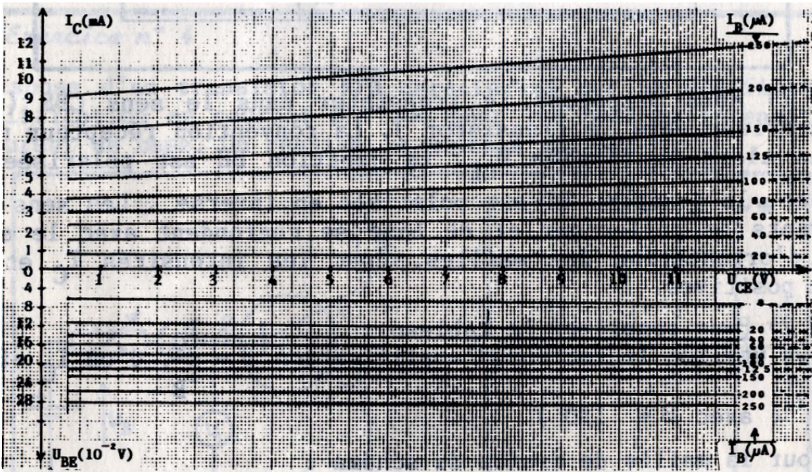
b) Quelles conditions doivent remplir les tensions U_{BE} , U_{CE} et U_{CB} pour obtenir une polarisation correcte du transistor. Indiquer alors sur le schéma le sens réel de chacun des courants I_C , I_B et I_E .

2) Ecrire l'équation de la droite de charge ($I_C = f(U_{CE})$) et placer cette droite sur le réseau de caractéristiques ci-joint.

3) Le point de fonctionnement correspond aux coordonnées du milieu de la droite de charge,

a) en déduire graphiquement I_C , I_B et U_{BE}

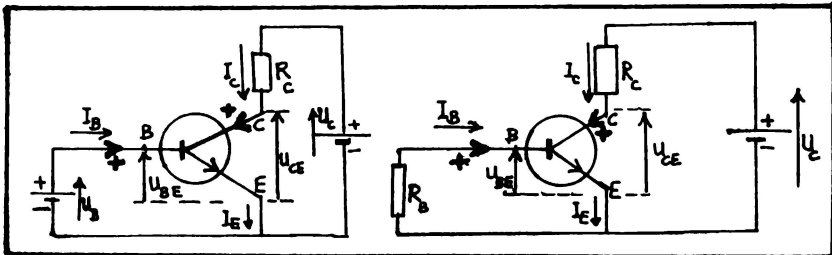
b) Déterminer le gain en courant du transistor au point de fonctionnement choisi.



(Rac, Option)

Corrigé

1) Pour que le transistor fonctionne normalement, il faut que la jonction BE soit polarisée en direct et que la jonction BC soit polarisée en inverse, cela donne les montages suivants:



U_{BE} , U_{CB} et par suite leur somme U_{CE} doivent être positives. Avec les polarisations que nous venons d'indiquer, nous obtenons

nous les sens réels des courants I_C , I_B et I_E . Avec la convention récepteur, nous obtenons des valeurs positives pour les intensités de ces courants. (voir schéma)

2) Considérons la maille de droite du schéma :

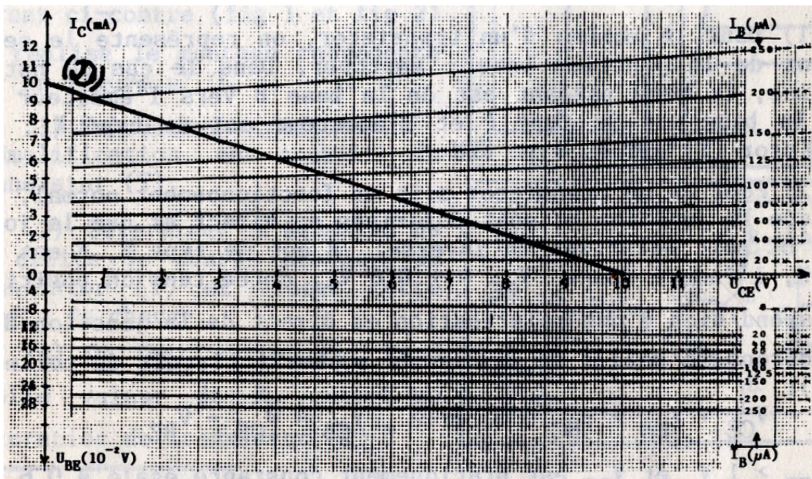
$$(V_D - V_E) + (V_E - V_C) + (V_C - V_D) = 0$$

$$U_C - U_{CE} - R_C I_C = 0 \quad I_C = \frac{U_C - U_{CE}}{R_C}$$

Utilisons le volt et le kiloohm comme unités pour avoir I_C en milliampère, nous obtenons :

$$I_C = \frac{10 - U_{CE}}{1} = 10 - U_{CE}$$

C'est l'équation de la droite de charge (D).



3) Le point de fonctionnement du transistor correspond au milieu M de la droite de charge. Ses coordonnées sont: 5V ; 5mA

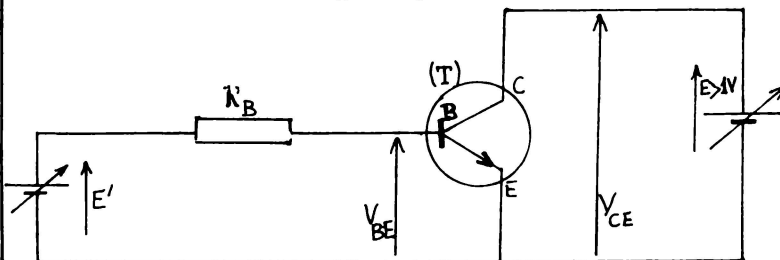
a) Nous lisons sur le réseau de caractéristiques, au point de fonctionnement: $I_C = 5 \text{ mA}$, $I_B = 125 \mu\text{A}$ et $U_{BE} = 0,21 \text{ V}$.

b) Le gain en courant du transistor au point de fonctionnement est :

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{5000 \mu\text{A}}{125 \mu\text{A}} = 40$$

Exercice n° 6

On considère le montage représenté sur le schéma suivant :



Le transistor (T) possède un coefficient d'amplification en courant $\beta = 150$. La mesure de V_{BE} pour différentes valeurs de E' montre que cette tension V_{BE} est constante et égale à $+0,6\text{ V}$

- 1) Quel est le type du transistor (T) ?
- 2) Montrer que le circuit considéré correspond à un fonctionnement normal du transistor (T).
- 3) On laisse E' constante et égale à 12 V .
 - a) On prend $R_B = 100\text{ k}\Omega$. Quelle est la valeur de l'intensité I_B du courant de base et l'intensité I_C du courant de collecteur ?
 - b) Quelle valeur doit-on donner à R_B pour obtenir un courant de collecteur d'intensité $I_C = 60\text{ mA}$?

Corrigé

1) Dans le schéma d'un transistor, on représente le sens passant de la jonction base - émetteur. Dans le cas de notre exercice, le sens passant est de la base B vers l'émetteur E, donc la base est de type P et l'émetteur est de type N : Le transistor (T) est du type NPN.

2) Pour qu'un transistor soit en fonctionnement normal, il faut que la jonction BE soit polarisée en direct et que la jonction BC soit polarisée en inverse. B est de type P, E est de type N, l'énoncé donne $V_{BE} = +0,6\text{ V}$, cette tension positive correspond bien à une polarisation en direct de la jonction BE. Considérons la maille de droite du schéma (circuit du collecteur) :

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \implies V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$$

or $V_{CE} > 1\text{ V}$ et V_{BE} est pratiquement constante égale à $0,6\text{ V}$, donc V_{CB} est positive et V_{BC} est négative. La jonction BC est polarisée en inverse.

Conclusion : BE polarisée en direct, BC polarisée en inverse, le transistor (T) fonctionne normalement.

3) a) Considérons la maille de gauche (circuit de base) :

$$V_{BE} + R_B \cdot I_B - E' = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$I_B = \frac{E' - V_{BE}}{R_B}$$

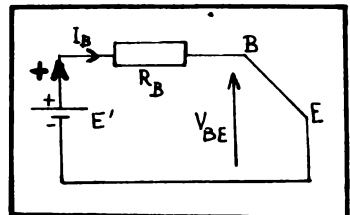
$$\text{A.N : } I_B = \frac{(12 - 0,6)\text{ V}}{100\text{ k}\Omega} = 0,114\text{ mA}$$

I_B est positive, le courant de base circule dans le sens (+).

L'intensité I_C du courant dans le circuit de collecteur est :

$$I_C = \beta \cdot I_B \quad \text{A.N : } I_C = 17,1\text{ mA}$$

b) Pour obtenir un courant de collecteur d'intensité



$I'_C = 60 \text{ mA}$, il faut augmenter I_B donc il faut diminuer R_B (E' et V_{BE} étant constantes).

La nouvelle valeur de I_B est: $I'_B = \frac{I'_C}{\beta} = \frac{60}{150} = 0,4 \text{ mA}$

La nouvelle valeur de la résistance R_B est: $R'_B = \frac{E' - V_{BE}}{I'_B}$

A.N : $R'_B = \frac{11,4 \text{ V}}{0,4 \text{ mA}} = 28,5 \text{ k}\Omega$.

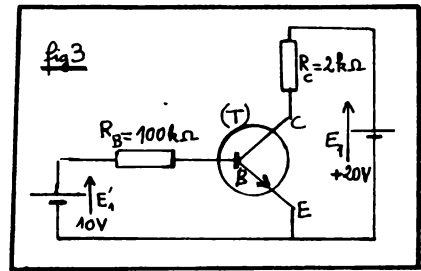
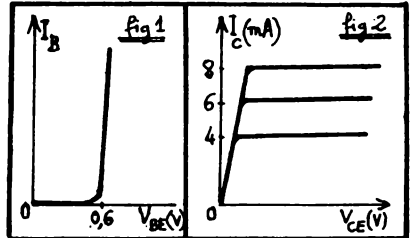
Exercice n° 7

Un transistor (T) au silicium présente les caractéristiques figurant ci-contre (fig 1 et fig 2). On réalise le montage représenté sur la figure n° 3.

1) Calculer le coefficient d'amplification en courant du transistor (T).

2) Déterminer l'équation de la droite de charge statique du transistor (T) et tracer cette droite de charge.

3) On fait varier R_B . Pour quelle valeur de R_B aura-t-on saturation du transistor (T) ?



Corrigé

1) Le coefficient d'amplification en courant est le rapport $\beta = \frac{I_C}{I_B}$. En effet, pour des intensités faibles du courant de base, l'intensité I_C du courant de collecteur est nettement plus grande que I_B , le rapport de I_C à I_B est le facteur ou coefficient d'amplification en courant du transistor.

D'après les caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ données dans l'énoncé, on a :

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{4}{0,08} = \frac{6}{0,12} = \frac{8}{0,16} = 50$$

2) Considérons la maille de droite dans le schéma page 147 (circuit de collecteur) :

$$V_{CE} - E_1 + R_C \cdot I_C = 0$$

$$I_C = -\frac{1}{R_C} \cdot V_{CE} + \frac{E_1}{R_C}$$

Cette équation $I_C = f(V_{CE})$ est l'équation d'une droite dans le repère (V_{CE}, I_C) .

C'est la droite de charge statique du transistor (T).

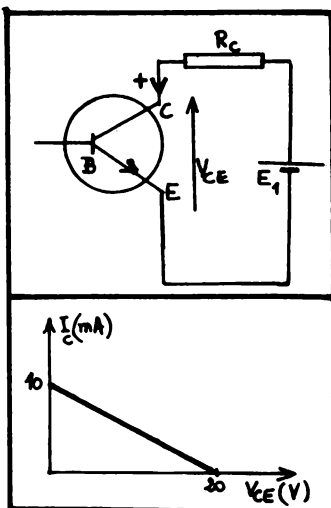
* Pour $V_{CE} = 0 \text{ V}$, $I_C = \frac{E_1}{R_C} = 10 \text{ mA}$

* $I_C = 0 \text{ mA}$ pour $V_{CE} = E_1 = 20 \text{ V}$

La droite de charge statique a pour équation :

$$I_C = -\frac{1}{2} V_{CE} + 10$$

La représentation graphique de la fonction $I_C = f(V_{CE})$ figure ci-contre.



3) Nous avons vu au " 2) " que $I_C = 10 \text{ mA}$ pour $V_{CE} = 0 \text{ V}$, donc le courant de collecteur ne peut jamais dépasser dans les conditions considérées l'intensité de 10 mA qui correspond à un courant de base d'intensité $I_B = \frac{I_C}{\beta} = 0,20 \text{ mA}$.

Cependant, I_B peut dépasser la valeur de $0,20 \text{ mA}$, donc la relation $I_C = \beta \cdot I_B$ n'est plus valable pour $I_B > 0,20 \text{ mA}$.

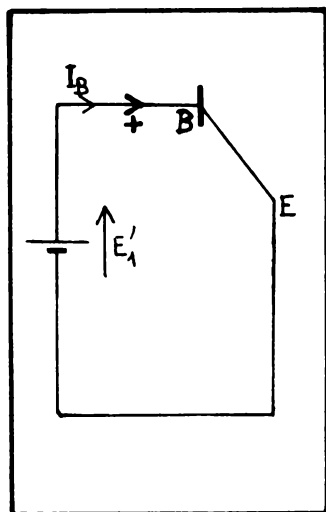
Considérons la maille de gauche (circuit de base) :

$$V_{BE} + R_B \cdot I_B - E'_1 = 0$$

$$I_B > 0,20 \text{ mA} \iff R_B < \frac{E'_1 - V_{BE}}{0,20} = 47 \text{ k}\Omega$$

Pour $R_B < 47 \text{ k}\Omega$, I_C devient constante et égale à 10 mA , quelle que soit la valeur de l'intensité du courant de base, qui est alors supérieure à $0,20 \text{ milliampère}$: Le transistor (T) est saturé.

CONCLUSION: Le transistor (T) est saturé pour toute valeur de R_B inférieure à $47 \text{ k}\Omega$.



-B-

CHIMIE

1- OXYDO-REDUCTION

Exercice n° 1

On réalise les deux expériences suivantes :

** Expérience n°1 :

Dans un tube à essai, on introduit de la poudre de fer et quelques cm³ d'une solution aqueuse de chlorure d'étain II SnCl_2 .

On agite.

** Expérience n° 2 :

On filtre le contenu du 1^{er} tube et sur le filtrat obtenu, on ajoute une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium, on obtient un précipité vert.

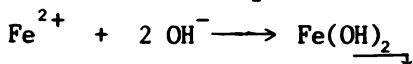
a) Interpréter la 2^{ème} expérience et écrire l'équation de la réaction de formation du précipité; donner le nom de ce précipité.

b) Donner les schémas de définition des couples rédox mis en jeu au cours de la première expérience. Indiquer le rôle de chaque espèce chimique.

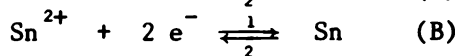
c) Dédire de l'expérience lequel des deux couples rédox considérés contient le réducteur le plus fort.

Corrigé

a) L'obtention du précipité vert montre que le filtrat contient des ions fer II (Fe^{2+}). Le précipité est l'hydroxyde de fer II de formule $\text{Fe}(\text{OH})_2$ obtenu suivant le schéma :



b) Quand la poudre de fer se trouve en présence des ions étain II, il y a une réaction chimique au cours de laquelle on obtient des ions Fe^{2+} . Ces ions fer II proviennent des atomes de fer qui perdent des électrons. Ces électrons sont captés par les ions étain II (Sn^{2+}) pour donner l'étain métallique. Donc les deux couples rédox mis en jeu au cours de cette réaction sont (Fe^{2+}/Fe) et (Sn^{2+}/Sn). Leurs schémas de définition sont:



Dans le couple (A), Fe est un réducteur et Fe^{2+} est son oxydant conjugué.

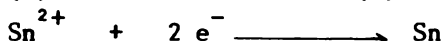
Dans le couple (B), Sn est un réducteur et Sn^{2+} est son oxydant conjugué.

c) L'expérience montre que :

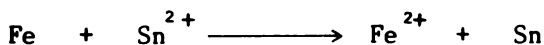
- Le couple (A) évolue dans le sens (2) suivant le schéma :



- Le couple (B) évolue dans le sens (1) suivant le schéma :



Le bilan est une réaction d'oxydo-réduction schématisée par :



Les ions étain (Sn^{2+}) ont oxydé le fer en ions Fe^{2+} donc :

Sn^{2+} est plus oxydant que Fe^{2+} et Fe est plus réducteur que Sn. Le couple (A) contient le réducteur le plus fort.

Exercice n° 2

Soit la classification de quelques couples rédox par pouvoir réducteur croissant :



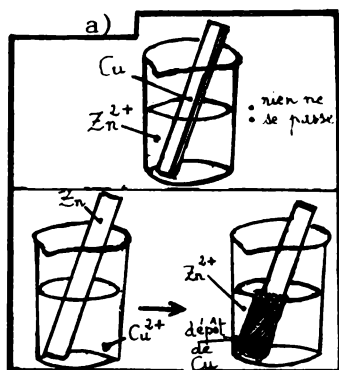
a) En déduire ce qui se passe en plongeant :

- une lame de cuivre dans une solution aqueuse de sulfate de zinc,
- une lame de zinc dans une solution aqueuse de sulfate de cuivre II,
- une lame de fer dans une solution aqueuse de nitrate d'argent

b) Une lame d'aluminium plongée dans une solution aqueuse de sulfate de fer II se recouvre de fer. Que peut-on conclure ? Justifier la réponse.

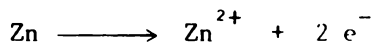
Corrigé

Soit la classification des couples par pouvoir réducteur croissant :

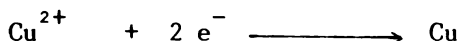


* Le cuivre est moins réducteur que le zinc. Il ne peut pas réduire les ions zinc II, donc il n'y aura pas de réaction chimique entre le cuivre et les ions Zn^{2+} .

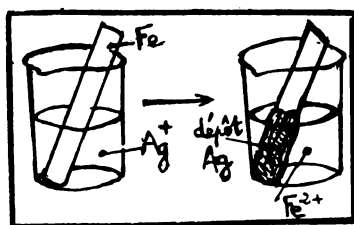
* Comme le zinc est plus réducteur que le cuivre, Zn peut céder des électrons aux ions Cu^{2+} suivant le schéma :



Le cuivre passe de l'état ionique Cu^{2+} à l'état atomique Cu suivant le schéma :

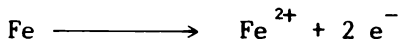


Il se produit donc une réaction chimique au cours de laquelle on observe la formation d'un dépôt rouge de cuivre et la décoloration de la solution initialement bleue (couleur due à l'existence des ions Cu^{2+}).

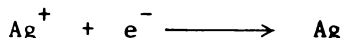


* Le fer est plus réducteur que l'argent. Le fer peut réduire les ions argent. Il y aura une réaction chimique au cours de laquelle :

- le fer s'oxyde en passant de l'état atomique à l'état ionique suivant le schéma :

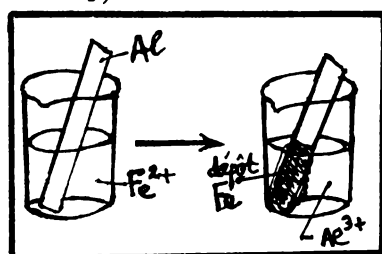


- l'argent passe de l'état ionique à l'état atomique (il se réduit) suivant le schéma :



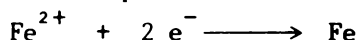
Il se produit donc un dépôt blanc très brillant d'argent Ag et la solution se colore en vert pâle par les ions Fe^{2+} (elle est presque incolore si la concentration en ions Fe^{2+} est faible).

b)



Puisqu'il y a formation d'un dépôt de fer, il y a donc une réaction chimique au cours de laquelle :

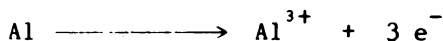
- le fer passe de l'état ionique à l'état atomique suivant le schéma :



(c'est une réduction),

- les électrons captés par Fe^{2+} proviennent des atomes d'aluminium

L'aluminium passe donc de l'état atomique à l'état ionique suivant le schéma :



Le bilan est une réaction d'oxydo-réduction schématisée par :



L'aluminium a réduit les ions Fe^{2+} , il est plus réducteur que le fer.

Exercice n° 3 //

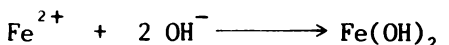
Dans une solution aqueuse de chlorure de fer III, on ajoute de la poudre de fer en excès. Après agitation, on prend un peu de la solution obtenue et on y ajoute quelques gouttes d'une solution aqueuse de soude, on obtient alors un précipité vert.

1) Donner le nom, la formule statistique et l'équation de la réaction de formation du précipité. Interpréter sa présence.

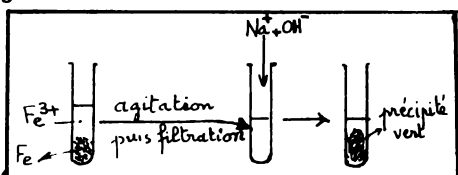
2) Quels sont les couples rédox qui interviennent dans la première expérience ? Lequel de ces couples contient le réducteur le plus fort ?

Corrigé

1) Le précipité vert est l'hydroxyde de fer II de formule $\text{Fe}(\text{OH})_2$ obtenu suivant le schéma :

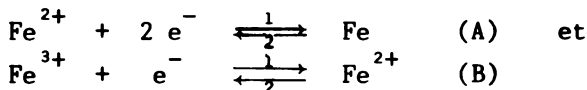


La solution obtenue après réac-



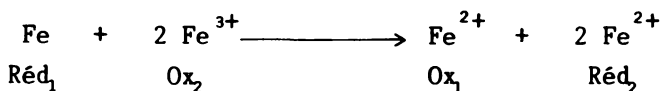
tion entre la poudre de fer et les ions Fe^{3+} contient des ions fer II (Fe^{2+}).

2) Les couples rédox mis en jeu au cours de la première expérience sont :



L'expérience montre que le couple (A) évolue dans le sens (2) et que le couple (B) évolue dans le sens (1).

Le bilan de la réaction d'oxydo-réduction est schématisé par :



Fe est plus réducteur que Fe^{2+} . Le couple (A) contient le réducteur le plus fort.

REMARQUE : Au cours de la réaction considérée, Fe^{2+} joue deux rôles : c'est le réducteur conjugué de Fe^{3+} et c'est l'oxydant conjugué de Fe.

Exercice n° 4

Dans un bécher contenant 0,5 g de limaille de fer ($m = 0,5 \text{ g}$), on verse 200 cm^3 d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique dont le pH est égal à 2.

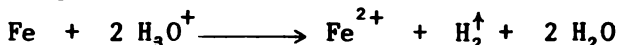
- 1) Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu.
- 2) Quels sont les couples rédox mis en jeu ?
- 3) Au cours de la réaction, la poudre de fer a-t-elle réagi totalement ? Si non, quelle est la masse du fer restant ?
- 4) Déterminer le volume de gaz obtenu.

On donne : Dans les conditions de l'expérience, le volume molaire du gaz est 24 litres.

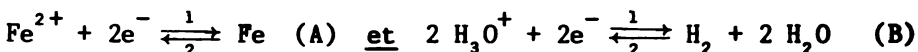
$$M(\text{Fe}) = 56 \text{ g. mol}^{-1}.$$

Corrigé

- 1) L'équation de la réaction s'écrit :



- 2) Les couples rédox mis en jeu sont :



Remarquons que le couple (A) a évolué dans le sens (2) et le couple (B) a évolué dans le sens (1).

- 3) pH = 2; La molarité de la solution en ions H_3O^+ est :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$$

Le nombre de moles d'ions H_3O^+ existant dans le volume utilisé

$$\text{est : } n = 10^{-2} \times 200 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

D'après l'équation de la réaction, une mole de fer réagit avec

deux moles d'ions H_3O^+ , donc le nombre de moles de fer qui a réagi est : $n_1 = 10^{-3} \text{ mol}$

La masse de fer qui a réagi est : $m_0 = 56 \times 10^{-3} = 0,056 \text{ g}$

La masse de fer restant est : $m - m_0 = 0,5 - 0,056 = 0,444 \text{ g}$

4) Le gaz dégagé est le dihydrogène H_2 .

2 moles d'ions H_3O^+ libèrent 1 mole de molécules de H_2

$2 \cdot 10^{-3} \text{ mole d'ions } \text{H}_3\text{O}^+ \text{ libère } 10^{-3} \text{ mole de molécules de } \text{H}_2$

Le volume de dihydrogène dégagé sera :

$$V = 10^{-3} \text{ mol} \times 24 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,024 \text{ l}$$

Exercice n° 5

On dissout 50 g de cristaux de sulfate de cuivre II hydraté de formule ($\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$) dans de l'eau pour obtenir un litre de solution.

1) Quelle est la molarité en ions Cu^{2+} de la solution obtenue ?

2) Dans un bécher, on verse un volume $V = 200 \text{ cm}^3$ de cette solution et on y plonge une lame de zinc.

a) Que se passe-t-il ?

b) Quelle est l'équation bilan de la réaction ?

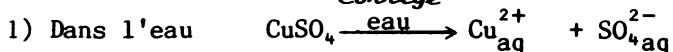
c) Quelle est la masse du produit solide obtenu à la fin de la réaction ?

3) Quelle est alors la molarité de la nouvelle solution en ions positifs obtenus ?

On donne les masses molaires atomiques :

$$M(\text{Cu}) = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}; M(\text{S}) = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}; M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Corrigé



Une mole de sulfate de cuivre II libère une mole d'ions Cu^{2+}

donc la molarité de la solution obtenue en ions Cu^{2+} est égale

à la molarité en sulfate de cuivre dissous, soit $n = \frac{m}{M}$

(M étant la masse molaire du sulfate de cuivre II hydraté)

$$M = 63,5 + 32 + 4 \times 16 + 5 \times 18 = 249,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La molarité de la solution en sulfate de cuivre dissous est

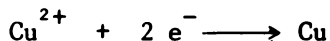
$$n = \frac{50}{249,5} = 0,20 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

d'où : $[\text{Cu}^{2+}] = 0,20 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

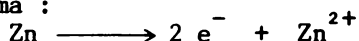
2) Une réaction chimique se produit entre le zinc et les ions Cu^{2+} ; au cours de cette réaction, il y a :

- décoloration de la solution bleue,
- disparition progressive du zinc solide,
- formation d'un dépôt rouge de cuivre.

b) Il y a donc passage du cuivre de l'état ionique à l'état atomique suivant le schéma :



et oxydation du zinc suivant le schéma :



L'équation bilan s'écrit : $\text{Cu}^{2+} + \text{Zn} \longrightarrow \text{Cu} + \text{Zn}^{2+}$

c) La disparition d'une mole d'ions Cu^{2+} s'accompagne de l'apparition d'une mole d'atomes de cuivre et d'une mole d'ions zinc Zn^{2+} .

Le nombre de moles d'ions Cu^{2+} contenues dans le volume V de solution est : $n = c \cdot V = 2 \cdot 10^{-1} \times 200 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$

La masse de cuivre formé est : $m = 4 \cdot 10^{-2} \times 63,5 = 2,54 \text{ g}$.

3) D'après l'équation $\text{Cu}^{2+} + \text{Zn} \longrightarrow \text{Cu} + \text{Zn}^{2+}$, le nombre de moles d'ions Zn^{2+} formées est égal au nombre de moles d'ions Cu^{2+} disparues, ce nombre vaut $4 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$.

La molarité de la nouvelle solution en ions Zn^{2+} obtenus est :

$$[\text{Zn}^{2+}] = \frac{4 \cdot 10^{-2} \times 1000}{200} = 0,2 \text{ mol.l}^{-1}$$

Exercice n° 6

Dans un bécher contenant 50 cm^3 de solution aqueuse de nitrate d'argent, on introduit $0,75 \text{ g}$ de poudre de fer, on agite et on filtre. Le résidu solide obtenu est séché puis pesé; sa masse est $m = 1,75 \text{ g}$.

1) Montrer que la nature du résidu dépend des quantités respectives de fer et de nitrate d'argent.

2) Montrer que dans le cas de l'exercice, une seule solution est compatible avec les données.

3) Calculer la molarité de la solution initiale en ions argent (Ag^{+}).

On donne : $M(\text{Ag}) = 108 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{Fe}) = 56 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

Le volume de la solution initiale de nitrate d'argent est

$V = 50 \text{ cm}^3$, la masse initiale de la poudre de fer est $m_0 = 0,75 \text{ g}$

et la masse du résidu solide obtenu est $m = 1,75 \text{ g}$.

1) Le fer est plus réducteur que l'argent, il y aura une réaction chimique entre la poudre de fer et les ions Ag^{+} , au cours de laquelle on obtient un dépôt d'argent métallique Ag suivant le schéma : $\text{Fe} + 2 \text{Ag}^{+} \longrightarrow \text{Fe}^{2+} + 2 \text{Ag}$
(voir exercice n° 2, question a).

Dans cette réaction, une mole d'atomes de fer réagit avec deux moles d'ions Ag^{+} pour donner deux moles d'atomes d'argent Ag.

Soit x le nombre de moles de fer utilisé et y le nombre de moles d'ions Ag^+ contenues dans le volume de solution initiale utilisée.

* Si $y \geq 2x$, tout le fer réagit et disparaît : le résidu sera de l'argent.

* Si $y < 2x$, le fer est en excès : le résidu sera un mélange de fer et d'argent.

2) Dans l'expérience considérée, le nombre de moles de fer utilisé est :

$$x = \frac{0,75}{56} = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

Si tout le fer disparaissait, le nombre de moles d'argent obtenues serait $y = 2x = 2,68 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$, la masse du résidu serait : $108 \times 2,68 \cdot 10^{-2} = 2,89 \text{ g}$ d'argent pur.

Cette masse est supérieure à celle du résidu réellement obtenu (1,75 g) : le résidu est un mélange de fer et d'argent.

3) Soit n le nombre de moles de fer disparues au cours de la réaction, le nombre de moles d'argent Ag qui apparaissent est le double ($2n$).

La masse (en g) du fer disparu est $m_1 = 56n$

La masse (en g) de l'argent apparu est $m_2 = 108 \times 2n = 216n$

La masse (en g) du fer restant est $m_3 = 0,75 - 56n$

La masse du résidu est $m = m_2 + m_3 = 1,75 \text{ g}$

$$\text{D'où : } 1,75 = 0,75 - 56n + 216n \implies 160n = 1 \implies n = \frac{1}{160}$$

Le nombre de moles d'ions Ag^+ contenues dans le volume de solution initiale est égal au nombre de moles d'argent solide apparu

$$2n = \frac{1}{80}$$

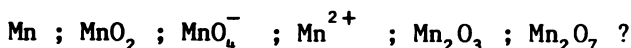
La molarité en ions Ag^+ de la solution initiale est :

$$[\text{Ag}^+] = \frac{2n}{V} = \frac{1}{80} \times \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = 0,25 \text{ mol.l}^{-1}$$

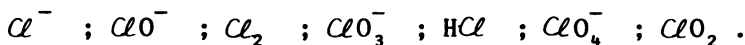
Nombre d'oxydation

Exercice n° 7

1) Quel est le nombre d'oxydation de l'élément manganèse dans les différentes espèces chimiques suivantes :



2) Même question pour l'élément chlore dans les espèces chimiques suivantes :



Corrigé

1) Soit x le nombre d'oxydation de Mn

* Dans Mn (corps pur simple), $x = 0$

* dans MnO_2 , $x + 2(-II) = 0 \implies x = +IV$

* dans MnO_4^- , $x + 4 \cdot (-II) = -I \implies x = +VII$

* dans Mn^{2+} , $x = +II$

* dans Mn_2O_3 , $2x + 3 \cdot (-II) = 0 \implies x = +III$

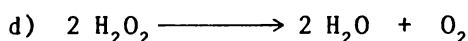
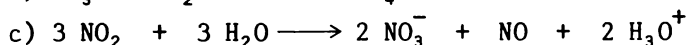
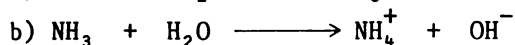
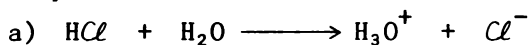
* dans Mn_2O_7 , $2x + 7 \cdot (-II) = 0 \implies x = +VII$

2) La même méthode, avec - en plus - le nombre d'oxydation +I pour l'atome H à l'état combiné, donne pour l'élément chlore les nombres d'oxydation suivants :

Espèces chimiques	Cl^-	ClO^-	Cl_2	ClO_3^-	HCl	ClO_4^-	ClO_2
Nb d'oxydation	-I	+I	0	+V	-I	+VII	+IV

Exercice n° 8

Les réactions dont les schémas suivent sont-elles des réactions d'oxydo-réduction ?

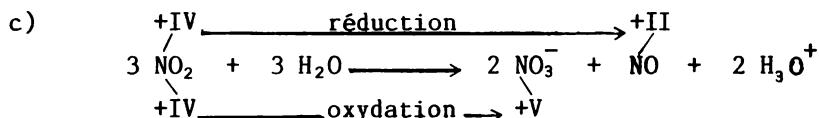


Dans le cas des réactions d'oxydo-réduction, indiquer quel est l'élément oxydé et quel est l'élément réduit.

Corrigé

a) $\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$. En cherchant le nombre d'oxydation du chlore dans HCl (-I) et dans Cl^- (-I), puis celui de l'oxygène dans H_2O (-II) et dans H_3O^+ (-II), on voit qu'il y a conservation du nombre d'oxydation, cette réaction n'est pas une oxydo-réduction.

b) $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$. Dans cette réaction, l'azote a un nombre d'oxydation égal à -III dans NH_3 et dans NH_4^+ , l'oxygène a le nombre d'oxydation -II dans H_2O et OH^- et l'hydrogène a le nombre d'oxydation +I dans les 4 espèces chimiques qui figurent dans l'équation. La réaction conserve les nombres d'oxydation : ce n'est pas une oxydo-réduction.



Le nombre d'oxydation de N a varié, celui de H et celui de O sont conservés, l'élément azote est l'élément oxydé et c'est lui-même l'élément réduit. La réaction est une oxydo-réduction.

d) $2 \text{H}_2\text{O}_2 \longrightarrow 2 \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$. Le nombre d'oxydation de l'oxygène est -I dans H_2O_2 , -II dans H_2O et zéro dans O_2 , la réaction est donc une réaction rédox au cours de laquelle

l'élément oxygène est l'élément oxydé et c'est lui-même l'élément réduit.

Exercice n° 9

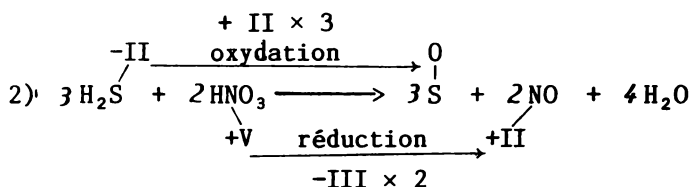
On fait barboter du sulfure d'hydrogène H_2S dans une solution d'acide nitrique. Une réaction se produit donnant du soufre, du monoxyde d'azote NO et de l'eau.

1) Quels sont dans cette réaction l'élément qui est oxydé et celui qui est réduit ?

2) En utilisant les nombres d'oxydation, équilibrer l'équation de cette réaction d'oxydo-réduction.

Corrigé

1) Le nombre d'oxydation du soufre est $-II$ dans H_2S , zéro dans S ; celui de l'azote est $+V$ dans HNO_3 , $+II$ dans NO . Dans cette réaction, le nombre d'oxydation du soufre augmente, donc le soufre s'oxyde. Le nombre d'oxydation de l'azote diminue, donc l'azote se réduit.



Au cours de cette réaction d'oxydo-réduction, la diminution du nombre d'oxydation de N est $-III$, l'augmentation du nombre d'oxydation de S est $+II$, il faut donc 3 S pour 2 N (c'est-à-dire 3 H_2S pour 2 HNO_3), on équilibre enfin les hydrogènes en mettant 4 H_2O .

Normalité - Dosage

Exercice n° 10

1) Expliquer comment l'ion fer II peut selon le milieu jouer le rôle d'un réducteur ou celui d'un oxydant.

2) Déterminer la normalité oxydante N_o et la normalité réductrice N_r d'une solution aqueuse de sulfate de fer II obtenue en dissolvant 1,52 g de sulfate de fer II anhydre dans de l'eau pour avoir un litre de solution.

Données : $M(Fe) = 56 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(S) = 32 \text{ g.mol}^{-1}$;
 $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

1) L'ion fer II peut soit :

a) perdre un électron suivant le schéma :

$Fe^{2+} \longrightarrow e^- + Fe^{3+}$, il joue alors le rôle d'un réducteur dont l'oxydant conjugué est l'ion fer III et ceci en présence

d'un oxydant dont le réducteur conjugué est plus faible que Fe^{2+} ,

b) gagner deux électrons suivant le schéma :

$\text{Fe}^{2+} + 2 e^- \longrightarrow \text{Fe}$, il joue alors le rôle d'un oxydant dont le réducteur conjugué est Fe et ceci en présence d'un réducteur plus fort que Fe.

2) La masse molaire de FeSO_4 est $M = 152 \text{ g.mol}^{-1}$

La molarité en ions Fe^{2+} est égale à la molarité en FeSO_4 dissous : $[\text{Fe}^{2+}] = \frac{m}{M} = \frac{1,52}{152} = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$

La normalité d'une solution oxydante est le nombre de moles d'électrons que peut capter un litre de la solution.

La normalité d'une solution réductrice est le nombre de moles d'électrons que peut céder un litre de la solution.

On voit donc que si la solution de FeSO_4 considérée est réductrice, 1 mole d'ions Fe^{2+} libère 1 mole d'électrons : $N_r = 10^{-2}$

Si par contre, cette solution est oxydante, 1 mole d'ions Fe^{2+} capte 2 moles d'électrons : $N_o = 2 \cdot 10^{-2}$.

Exercice n° 11

1) a) Ecrire le schéma de transformation de l'ion permanganate MnO_4^- en ion manganèse Mn^{2+} en milieu acide.

b) Quelle masse de permanganate de potassium solide faut-il utiliser pour préparer une solution aqueuse (A) de normalité $N_1 = 0,1$?

2) On utilise $V_1 = 20 \text{ cm}^3$ de cette solution pour doser $V_2 = 10 \text{ cm}^3$ d'une solution de sulfate de fer II de normalité N_2 inconnue (la réaction se fait en milieu acide).

a) Etablir la relation entre N_1 , N_2 , V_1 et V_2 .

b) En déduire la valeur de N_2 et la masse de sulfate de fer II anhydre dissous dans le volume utilisé.

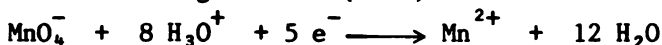
On donne les masses molaires atomiques suivantes :

$$M(\text{Fe}) = 56 \text{ g.mol}^{-1}; \quad M(\text{K}) = 39 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$M(\text{Mn}) = 55 \text{ g.mol}^{-1}; \quad M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}; \quad M(\text{S}) = 32 \text{ g.mol}^{-1}$$

Corrigé

1) a) En milieu acide, l'ion permanganate MnO_4^- se transforme en ion manganèse II (Mn^{2+}) suivant le schéma :



b) La normalité d'une solution oxydante est le nombre de moles d'électrons susceptibles d'être captées par un litre

de la solution oxydante par réduction de toutes les espèces oxydantes au cours d'une réaction d'oxydo-réduction.

La normalité de (A) est $N_1 = 0,1$, un litre de cette solution peut capter 0,1 mole d'électrons. D'après l'équation précédente, une mole d'ions MnO_4^- capte 5 moles d'électrons, donc 0,1 mole d'électrons est capté par $\frac{1}{50}$ de mole d'ions MnO_4^- . Il faut utiliser $\frac{1}{50}$ de mole de $KMnO_4$ par litre de solution, d'où

on déduit la masse de cristaux de $KMnO_4$ à dissoudre pour obtenir un litre de solution : $m = \frac{1}{50} \times \text{masse molaire de } KMnO_4$

$$M = 39 + 55 + 4 \times 16 = 158 \text{ g.mol}^{-1}$$

La masse de $KMnO_4$ utilisée est $m = \frac{158}{50} = 3,16 \text{ g.}$

2) a) Le nombre de moles d'électrons cédés par le volume V_2 de la solution aqueuse de sulfate de fer II est $N_2 \cdot V_2$, le volume V_2 étant en litre.

Le nombre de moles d'électrons captés par le volume V_1 de la solution de permanganate de potassium est $N_1 \cdot V_1$ (V_1 en l.).

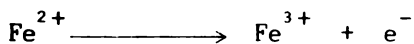
A l'équivalence, le nombre de moles d'électrons captés par la solution oxydante est égal au nombre de moles d'électrons cédés par la solution réductrice, d'où :

$N_1 \cdot V_1 = N_2 \cdot V_2$. Cette relation, établie avec V_1 et V_2 en litres, reste valable avec les volumes exprimés en une même autre unité, mais les produits $N_1 V_1$ et $N_2 V_2$ ne seront plus égaux au nombre de moles d'électrons mis en jeu.

b) La normalité de la solution réductrice (B) est :

$$N_2 = \frac{N_1 \times V_1}{V_2} = \frac{0,1 \times 20}{10} = 0,2$$

Au cours de la réaction d'oxydo-réduction considérée, les ions fer II se transforment en ions fer III suivant le schéma :



Une mole d'ions Fe^{2+} cède une mole d'électrons. Comme $N_2 = 0,2$ on conclut qu'un litre de la solution (B) contient 0,2 mole d'ions Fe^{2+} . La masse de sulfate de fer II (anhydre) solide dissous dans le volume V_2 est :

$$m = C_2 \cdot M(FeSO_4) \cdot V_2 \quad (\text{avec } C_2 = 0,2 \text{ mol.l}^{-1})$$

La masse molaire de $FeSO_4$ est $M = 56 + 32 + 4(16) = 152 \text{ g.mol}^{-1}$

$$m = 0,2 \times 152 \times 10^{-2} = 0,304 \text{ g}$$

Exercice n° 12

En milieu acide, on dose 15 cm^3 d'une solution aqueuse de chlorure de fer II par une solution de dichromate de potassium ($\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$) de molarité $5.10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$. 40 cm^3 sont alors nécessaires pour atteindre l'équivalence.

1) Ecrire l'équation de transformation de l'ion $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ en ion Cr^{3+} en milieu acide.

2) Ecrire l'équation de la réaction rédox.

3) Quelle est la normalité N_1 de la solution oxydante utilisée ?

4) Quelle est la normalité N_2 de la solution réductrice utilisée ?

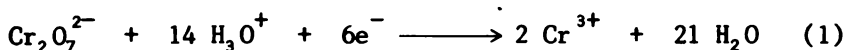
5) Sachant que la solution aqueuse de chlorure de fer II a été obtenue par dissolution de 7,96 g de chlorure de fer II hydraté ($\text{FeCl}_2 \cdot n \text{ H}_2\text{O}$) dans l'eau pour obtenir 500 cm^3 de solution, calculer n.

On donne les masses molaires atomiques en g.mol^{-1} :

$M(\text{Fe}) = 56$; $M(\text{Cl}) = 35,5$; $M(\text{H}) = 1$; $M(\text{O}) = 16$

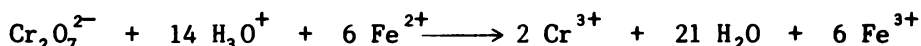
Corrigé

1) En milieu acide, l'ion dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ se transforme en ion chrome III (Cr^{3+}) suivant le schéma :



2) Au cours de ce dosage, il y a transformation des ions Fe^{2+} en ions Fe^{3+} suivant le schéma : $\text{Fe}^{2+} \longrightarrow \text{e}^- + \text{Fe}^{3+}$ (2)

Pour obtenir l'équation bilan, on multiplie l'équation (2) par 6 et on l'additionne avec (1), on obtient :



3) Une mole de $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ correspond à une mole d'ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ qui capte 6 moles d'électrons, d'où la normalité de la solution oxydante est $N_1 = 6 \times \text{molarité} = 6 \times 5.10^{-3} = 3.10^{-2}$

4) A l'équivalence, on a :

$$N_1 \cdot V_1 = N_2 \cdot V_2 \implies N_2 = \frac{N_1 \cdot V_1}{V_2} = 8.10^{-2}$$

5) Soit x le nombre de moles de chlorure de fer II hydraté dans le volume $V = 0,5 \text{ l}$ de solution, $x = V \cdot N_2 = 0,04$ mole. Déterminons la masse molaire M du chlorure de fer II hydraté en fonction de n : $M(\text{FeCl}_2 \cdot n \text{ H}_2\text{O}) = 127 + 18n$ (g.mol^{-1})

On a dissous 7,96 g de chlorure de fer II hydraté, donc :

$$m = x \cdot M \implies 7,96 = 0,04 \times (127 + 18n)$$

$$\implies n = \frac{7,96 - 0,04 \times 127}{0,04 \times 18} = 4$$

Le chlorure de fer II hydraté a pour formule ($\text{FeCl}_2 \cdot 4 \text{ H}_2\text{O}$).

2- ANALYSE ELEMENTAIRE

Exercice n° 1

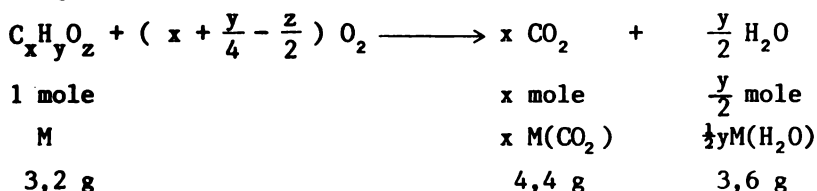
La combustion complète dans le dioxygène de 3,2 g d'un composé ne renfermant que du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène fournit 4,4 g de dioxyde de carbone et 3,6 g d'eau.

Déterminer la formule moléculaire brute de cette substance sachant que la densité de sa vapeur par rapport à l'air est $d = 1,1$.

$$M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; \quad M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1} ; \quad M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$$

Corrigé

La formule moléculaire de la substance peut s'écrire $C_x H_y O_z$.
L'équation de sa combustion est :



Masse molaire moléculaire de la substance : $M = 29d = 29 \times 1,1$
 $M \approx 32 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse molaire moléculaire de CO₂ : 44 g.mol^{-1}

Masse molaire moléculaire de H₂O : 18 g.mol^{-1}

$$\star \frac{M}{3,2} = \frac{44 x}{4,4} \implies x = \frac{32 \times 4,4}{3,2 \times 44} = 1$$

$$\star \frac{M}{3,2} = \frac{9 y}{3,6} \implies y = \frac{32 \times 3,6}{3,2 \times 9} = 4$$

$$\star M = 12x + y + 16z \approx 32 \implies z = 1$$

La formule moléculaire brute de la substance est : CH₄O

Exercice n° 2

L'urée est un composé organique , sa masse molaire moléculaire est $M = 60 \text{ g.mol}^{-1}$. Sa composition centésimale en masse est : 46,7 % d'azote, 26,6 % d'oxygène, 20,0 % de carbone et 6,7 % d'hydrogène.

Déterminer la formule moléculaire brute de l'urée.

Masses molaires atomiques en g.mol^{-1} : M(C) = 12 ; M(H) = 1 ;
M(N) = 14 ; M(O) = 16

Corrigé

Soit $C_x H_y O_z N_t$ la formule moléculaire de l'urée. Soit M sa masse molaire moléculaire, $M = 60 \text{ g.mol}^{-1}$

Une mole d'urée renferme 12x g de carbone qui représentent 20 % de la masse de cette mole.

$$\text{D'où : } \frac{12x}{M} = \frac{20}{100} \implies x = \frac{20 \times 60}{12 \times 100} = 1$$

$$\text{De même : } * \frac{y}{M} = \frac{6,7}{100} \implies y = \frac{6,7 \times 60}{100} = 4$$

$$* \frac{16z}{M} = \frac{26,6}{100} \implies z = \frac{26,6 \times 60}{16 \times 100} = 1$$

$$* \frac{14t}{M} = \frac{46,7}{100} \implies t = \frac{46,7 \times 60}{14 \times 100} = 2$$

La formule moléculaire brute de l'urée est CH_4ON_2 .

Exercice n° 3

On veut déterminer la formule d'un composé organique (A) formé uniquement de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. On utilise une masse "m" de ce corps.

1) On porte cette masse à une température $\theta = 100^\circ\text{C}$, il y a alors vaporisation de toute la quantité. Le volume occupé par le gaz obtenu est alors $V' = 3,055 \text{ l}$ sous la pression atmosphérique normale. Sa densité par rapport à l'air est $d = 1,568$. Déterminer :

a) le nombre n de moles de (A) contenues dans la masse m considérée.

b) la masse molaire moléculaire de (A) et la masse m utilisée.

2) La combustion complète de 4,6 g de (A) par le dioxygène donne 5,4 g d'eau et 4,8 l de dioxyde de carbone ($p = 1 \text{ atm}$; $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$).

a) Dédurre la formule brute du corps (A) et les formules semi-développées possibles.

b) Sachant que dans (A) les atomes de carbone sont liés entre eux par des liaisons de covalence simples, quelle est la formule développée de (A) ?

Données : à 20°C , le volume molaire du gaz est 24 l .

$$M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1} ; M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$$

Corrigé

1) a) Le volume molaire gazeux à 20°C (donc à $T_1 = 293 \text{ K}$) est $V_1 = 24 \text{ l}$. Le volume molaire de la substance (vaporisée) à 100°C (soit $T = 373 \text{ K}$) est, d'après l'équation caractéristique des gaz parfaits $\frac{pV}{T} = \text{constante}$, à pression constante, égal à :

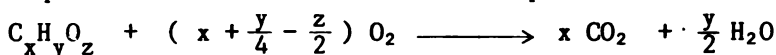
$$V = V_1 \frac{T}{T_1} = 24 \times \frac{373}{293} \approx 30,55 \text{ l}$$

Le volume de la substance à $T = 373 \text{ K}$ est $V' = 3,055 \text{ l}$, donc le nombre n de moles de (A) contenues dans la masse m est :

$$n = \frac{V'}{V} = 0,1 \text{ mole.}$$

b) La masse molaire moléculaire de (A) est : $M = 29 \text{ d}$,
 $M = 46 \text{ g.mol}^{-1}$ et la masse utilisée est : $m = n \cdot M = 4,6 \text{ g}$.

2) a) Soit $C_x H_y O_z$ la formule moléculaire brute de (A).
 L'équation bilan de la combustion complète s'écrit :



1 mole	x moles	$\frac{y}{2}$ moles
0,1 mole	0,1x mol	0,1 $\frac{y}{2}$ mol

Or le nombre de moles de dioxyde de carbone obtenues est :

$$n = \frac{V_{CO_2}}{V_{(mol)}} = \frac{4,8}{24} = 0,2 \text{ mole}$$

et le nombre de moles d'eau obtenues est :

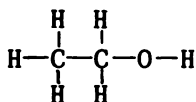
$$n = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{5,4}{18} = 0,3 \text{ mole}$$

Donc $0,1 x = 0,2 \Rightarrow x = 2$ et $0,1 \frac{y}{2} = 0,3 \Rightarrow y = 6$

Recherche de z : $M = 12x + y + 16z = 24 + 6 + 16z = 46 \Rightarrow z = 1$

La formule brute de (A) est $C_2 H_6 O$. Les formules semi-développées sont : H_3C-CH_2OH (éthanol) et $H_3C-O-CH_3$ (diméthoxyde)

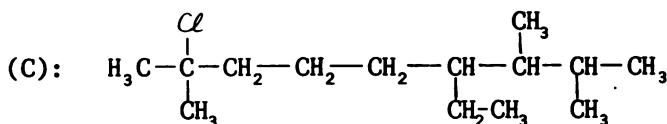
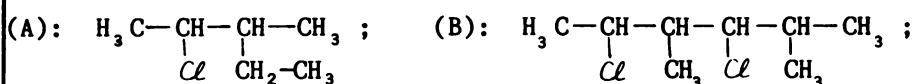
b) Dans la molécule de (A), les atomes C sont liés entre eux par une liaison de covalence simple σ , donc le composé (A) est l'éthanol de formule développée :



3- ALCANES

Exercice n° 1

1) Donner le nom de chacun des composés suivants :



2) Donner les formules semi-développées des composés suivants :

(D): le monochloro-2 diméthyl-2, 3 pentane

(E): le dichloro-1, 3 méthyl-3 butane

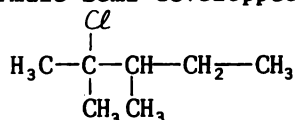
Corrigé

1) (A) est le monochloro-2 méthyl-3 pentane

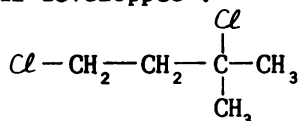
(B) est le dichloro-2, 4 diméthyl-3, 5 hexane

(C) est le monochloro-2 éthyl-6 triméthyl-2, 7, 8 nonane

2) (D) a pour formule semi-développée :



(E) a pour formule semi-développée :

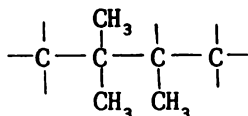


Exercice n° 2

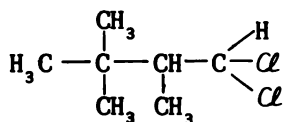
Donner les noms et les formules semi-développées des différents isomères à chaînes ramifiées, comportant trois groupements méthyle et admettant pour formule brute $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{Cl}_2$

Corrigé

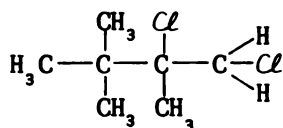
Puisque la molécule de chaque isomère contient 7 atomes C et elle comporte 3 groupements méthyle CH_3 en ramifications, alors la chaîne carbonée principale comporte nécessairement 4 atomes de carbone. La chaîne carbonée ramifiée possible est donc :



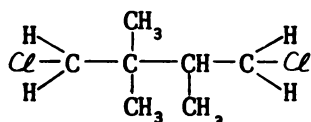
Les isomères demandés ont pour formules semi-développées :



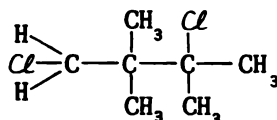
le dichloro-1, 1 triméthyl-2, 3, 3 butane



le dichloro-1, 2 triméthyl-2, 3, 3 butane



le dichloro-1, 4 triméthyl-2, 2, 3 butane



le dichloro-1, 3 triméthyl-2, 2, 3 butane

Quatre isomères de formule brute $C_7H_{14}Cl_2$ répondent au problème.

Exercice n° 3

1) Calculer la densité d par rapport à l'air d'un alcane linéaire gazeux en fonction du nombre n d'atomes de carbone par molécule.

2) Un alcane (A) linéaire gazeux a une densité égale à 2. En déduire la formule brute de cet alcane. Donner les formules semi-développées des différents isomères de cet alcane.

3) La réaction de (A) avec le dibrome donne un corps (B) de masse molaire moléculaire $M = 216 \text{ g.mol}^{-1}$.

a) Trouver la formule brute de (B).

b) Sachant que (A) ne peut donner que trois dérivés disubstitués possibles, que sera le nom de l'alcane (A) ?

On donne les masses molaires atomiques :

$$M(\text{Br}) = 80 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$$

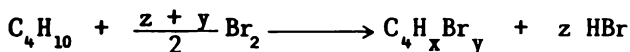
Corrigé

1) La formule d'un alcane aliphatique (linéaire) est $C_n H_{2n+2}$; sa masse molaire moléculaire est $M = 14n + 2$ (en $g.mol^{-1}$) ; sa densité par rapport à l'air est $d = \frac{14n+2}{29}$

$$2) \quad d = 2 \Rightarrow \frac{14n + 2}{20} = 2 \Rightarrow 14n = 56 \Rightarrow n = 4$$

La formule brute de l'alcane (A) est C_4H_{10} , elle correspond à la formule semi-développée $H_3C-CH_2-CH_2-CH_3$ du butane et à la formule s-d $H_3C-\underset{\substack{| \\ CH_3}}{CH}-CH_3$ du méthyl-2 propane.

3) a) La réaction de l'alcane avec le dibrome est une réaction de substitution dont l'équation est :



(y étant le nombre d'atomes de brome dans le composé obtenu, - par molécule - , z étant le nombre de molécules HBr obtenues à partir d'une molécule d'alcane et x étant le nombre d'atomes H dans la molécule du composé bromé obtenu , on a $x + y = 10$) Au cours de la réaction, il y a substitution des atomes Br aux atomes H , donc le nombre d'atomes H dans la molécule du corps obtenu vérifie la relation : $0 \leq x < 9$ (1)

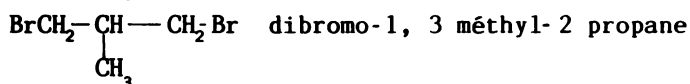
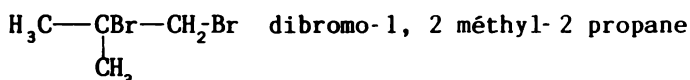
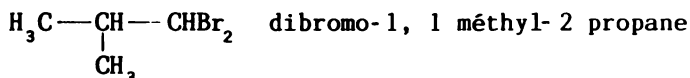
La masse molaire moléculaire de (B) est :

$$M = 48 + x + 80y = 216 \text{ g.mol}^{-1} \implies x = 168 - 80y \quad (2)$$

(1) et (2) donnent $1,98 \leq y \leq 2,1$ d'où $y = 2$ et $x = 8$

Le composé (B) a pour formule brute $C_4H_8Br_2$

b) Le butane peut donner 6 isomères de formule brute $C_4H_8Br_2$. L'énoncé précise que l'alcane (A) ne donne que trois dérivés disubstitués, donc (A) est le méthyl-2 propane (ou méthyl propane). Les composés obtenus sont :



Exercice n° 4

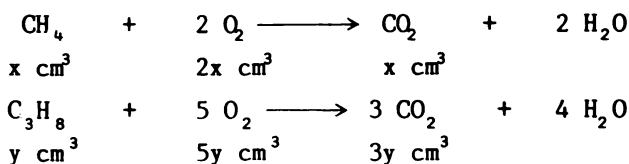
Soit un mélange gazeux de méthane et de propane de volume total $V_1 = 20 \text{ cm}^3$. Après combustion complète dans le dioxygène et retour aux conditions initiales de pression et de température, on obtient un volume $V_2 = 32 \text{ cm}^3$ de dioxyde de carbone. Quelle était la composition de ce mélange gazeux ?

Corrigé

Soit x et y les volumes respectifs (en cm^3) du méthane et du propane dans le mélange gazeux initial considéré.

$$x + y = 20 \text{ cm}^3 \quad (1)$$

Les équations de la combustion complète s'écrivent :



Le volume de dioxyde de carbone obtenu est :

$$x + 3y = V_2 = 32 \text{ cm}^3 \quad (2)$$

(1) et (2) forment le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 20 \\ x + 3y & = & 32 \end{array} \implies y = 6 \text{ cm}^3 \text{ et } x = 14 \text{ cm}^3$$

Le mélange initial était formé de 14 cm^3 de méthane et de 6 cm^3 de propane.

Exercice n° 5

Le dichlore et l'éthane réagissent par substitution. Dans certaines conditions expérimentales, on obtient un composé (A) de masse molaire moléculaire $M = 99 \text{ g.mol}^{-1}$.

1) Quelle est la formule brute du corps (A) ?

2) Ecrire l'équation de la réaction.

3) Le corps (A) a-t-il des isomères ? Si oui, les nommer et donner leurs formules semi-développées.

$$M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$$

Corrigé

1) L'éthane de formule brute C_2H_6 réagit avec le dichlore par substitution. Comme au cours de cette réaction de substitution, il y a remplacement d'atomes d'hydrogène par des atomes de chlore, la formule brute du composé chloré obtenu sera $\text{C}_2\text{H}_x\text{Cl}_y$, on notera (A) ce composé chloré. Le nombre y des atomes de chlore peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Le nombre x des atomes d'hydrogène sera alors 5, 4, 3, 2, 1 ou 0.

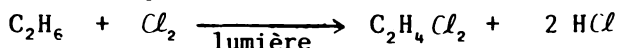
La masse molaire moléculaire de (A) a pour expression :

$$M = 24 + x + 35,5y, \text{ et puisque } M = 99 \text{ g.mol}^{-1}, \text{ alors, on a : } 24 + x + 35,5y = 99 \text{ d'où : } x = 75 - 35,5y; \text{ or } 0 \leq x \leq 5 \text{ donc } 0 \leq 75 - 35,5y \leq 5 \text{ et } 1,97 \leq y \leq 2,11$$

y étant entier, on conclut que $y = 2$ et $x = 4$

La formule brute du composé (A) est $\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}_2$.

2) L'équation de la réaction est :



3) Le corps (A) peut être l'un des deux isomères suivants:

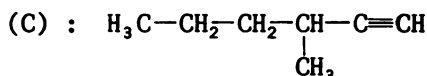
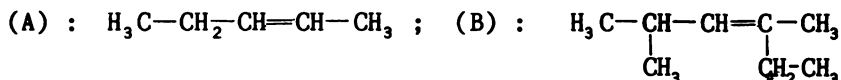
$\text{H}_3\text{C}-\text{CHCl}_2$ (dichloro-1, 1 éthane)

$\text{ClCH}_2-\text{CH}_2\text{Cl}$ (dichloro-1, 2 éthane)

4- HYDROCARBURES INSATURES

Exercice n° 1

1) Quels sont les noms des hydrocarbures dont les formules suivent :

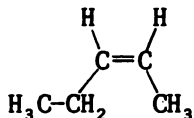


2) Déterminer, parmi les noms et les formules suivants ceux qui sont faux ou ne correspondent pas à des composés stables. Expliquer.

Le monochloro-2 propyne ; le méthyl-2 propène ; le monochloro-2 méthyl-2 butène-1 ; $\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{C}\begin{array}{l} \text{H} \\ | \\ \text{H} \end{array}$; $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\text{C}=\text{C}-\text{CH}_3$; $\begin{array}{c} \text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{CH}_2 \\ | \\ \text{OH} \end{array}$; $\begin{array}{c} \text{Cl} \\ | \\ \text{C}=\text{C}-\text{CH}_3 \end{array}$

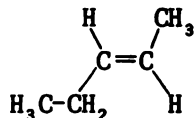
Corrigé

1) (A) est le pentène-2, il se présente sous forme de deux isomères :



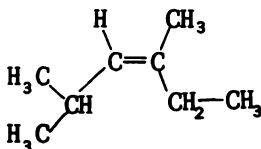
Le pentène-2 (Z)

et



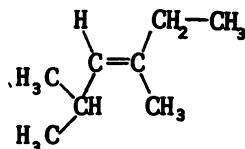
le pentène-2 (E)

(B) est le diméthyl-2, 4 hexène-3, il présente l'isomérisie Z,E :



isomère (Z)

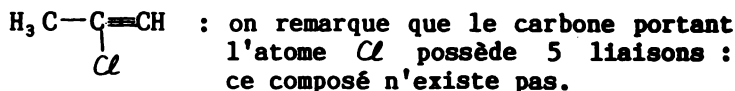
et



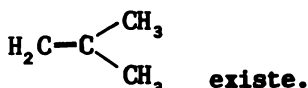
isomère (E)

(C) est le méthyl-3 hexyne-1.

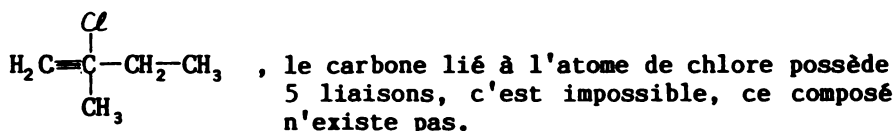
2)* La formule semi-développée du monochloro-2 propyne s'écrit :



* Le méthyl-2 propène de formule:



* Le monochloro-2 méthyl-2 butène-1 doit avoir pour formule semi-développée :



★ La formule $\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{CH}_2$ est fausse, elle contient un carbone à trois liaisons.

★ La formule $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\underset{\text{Cl}}{\text{C}}=\underset{\text{Cl}}{\text{C}}-\text{CH}_3$ est fausse, le carbone portant Cl possède 5 liaisons.

★ La formule $\text{H}_3\text{C}-\underset{\text{OH}}{\text{C}}-\text{CH}_2$ correspond à un énol instable, car le carbone portant le groupement -OH est doublement lié à un autre carbone.

Exercice n° 2

Un composé organique (A) de masse molaire moléculaire M égale à 113 g.mol^{-1} contient 31,9 % de carbone, 5,3 % d'hydrogène et 62,8 % de chlore.

1) Déterminer la formule moléculaire brute de (A).

2) Quels sont les différents isomères possibles correspondant à cette formule ?

3) Le composé (A) est obtenu par addition du dichlore sur un alcène. Quel est le nom du corps (A) ? Quel est le nom de l'alcène ? Ecrire l'équation de la réaction correspondante.

$$M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g.mol}^{-1}$$

Corrigé

1) Soit $\text{C}_x\text{H}_y\text{Cl}_z$ la formule moléculaire brute de (A), x, y et z étant des entiers naturels différents de zéro. Une mole de molécules de ce composé a pour masse 113 g et contient 31,9 % de carbone, 5,3 % d'hydrogène et 62,8 % de chlore.

- Le nombre de moles d'atomes de carbone dans une mole de (A) est :

$$x = \frac{113 \times 31,9}{100 \times 12} = 3$$

- Le nombre de moles d'atomes d'hydrogène dans une mole de (A)

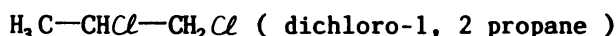
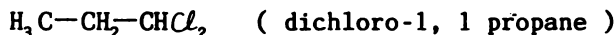
est $y = \frac{113 \times 5,3}{100 \times 1} = 6$

- Le nombre de moles d'atomes de chlore dans une mole de (A)

est $z = \frac{113 \times 62,8}{100 \times 35,5} = 2$

La formule moléculaire brute de (A) est $\text{C}_3\text{H}_6\text{Cl}_2$.

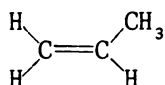
2) Les isomères possibles de (A) sont :



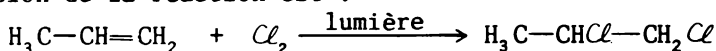
3) L'addition du dichlore sur un alcène se fait suivant le schéma :

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{C}=\text{C} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \text{Cl}_2 \longrightarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ -\text{C}-\text{C}- \\ | \quad | \\ \text{Cl} \quad \text{Cl} \end{array}$$

Donc dans le composé (A), les deux atomes de chlore doivent être sur deux carbones voisins, d'où le composé (A) ne peut être que le dichloro-1, 2 propane. L'alcène est le propène



L'équation de la réaction est :



Exercice n° 3

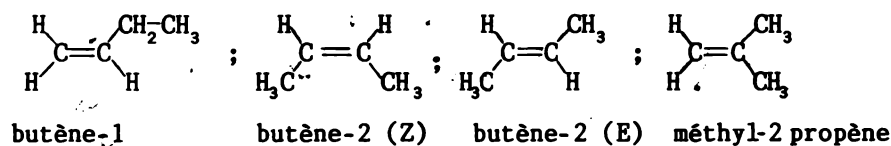
Un alcène a pour masse molaire moléculaire $M = 56 \text{ g.mol}^{-1}$

- 1) Déterminer la formule moléculaire brute de cet alcène.
- 2) Donner les formules semi-développées et les noms des différents isomères possibles de cet alcène.
- 3) L'un de ces isomères donne par hydrogénation un composé différent de ceux donnés par les autres isomères. Lequel ? Justifier.

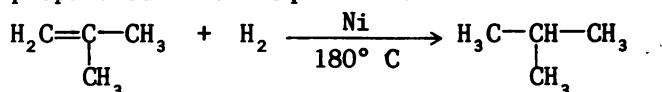
Corrigé

1) La formule générale d'un alcène est C_nH_{2n} ; la masse molaire moléculaire s'écrit : $M = 12n + 2n = 14n$; or cette masse molaire vaut 56 g.mol^{-1} pour l'alcène considéré donc $n = 4$. La formule brute est C_4H_8 .

2) Les différents isomères :



3) Les trois premiers alcènes (butènes -1, -2"Z" et -2"E") donnent par hydrogénation le butane de formule semi-développée $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$. Seul le méthyl-2 propène donne le méthyl-2 propane suivant l'équation :



Exercice n° 4

Soit un mélange gazeux de méthane, de propène et de butyne, de volume total $V_1 = 25 \text{ cm}^3$. On lui ajoute 200 cm^3 de dioxygène et on provoque la combustion complète.

Après retour à la température et à la pression initiales, il

ne reste qu'un volume $V_2 = 168 \text{ cm}^3$, formé de dioxygène et de dioxyde de carbone, 58 cm^3 de ce mélange final pouvant être absorbés par la potasse. En déduire la composition du mélange initial d'hydrocarbures.

Corrigé

Soient x , y et z les volumes respectifs de méthane, de propène et de butyne :

$$x + y + z = V_1 = 25 \text{ cm}^3.$$

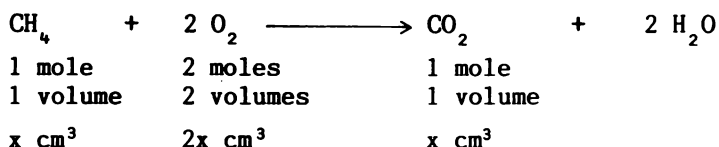
Le gaz absorbé par la potasse est le dioxyde de carbone :
 $V(\text{CO}_2) = 58 \text{ cm}^3$.

Volume de dioxygène restant : $V'(\text{O}_2) = 168 - 58 = 110 \text{ cm}^3$

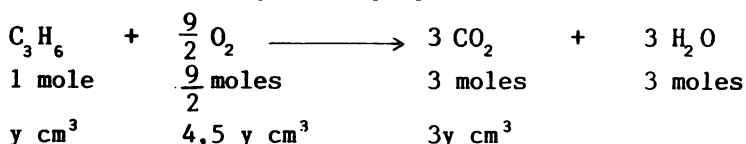
Volume de dioxygène consommé : $V(\text{O}_2) = 200 - 110 = 90 \text{ cm}^3$

Les équations de combustion s'écrivent :

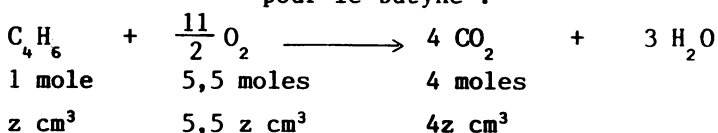
* pour le méthane :



* pour le propène :



* pour le butyne :



Nous déduisons de ce qui précède le système de trois équations du premier degré en x , y et z :

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = x + y + z \\ V(\text{CO}_2) = x + 3y + 4z \\ V(\text{O}_2) = 2x + \frac{9}{2}y + \frac{11}{2}z \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 3y + 4z = 58 \\ 4x + 9y + 11z = 180 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$x = 11 \text{ cm}^3 ; y = 9 \text{ cm}^3 ; z = 5 \text{ cm}^3.$$

Le mélange gazeux initial était formé de 11 cm^3 de méthane, 9 cm^3 de propène et de 5 cm^3 de butyne.

Exercice n° 5

1) Quelle masse m de carbure de calcium CaC_2 doit-on faire réagir avec l'eau pour obtenir $V = 100 \text{ l}$ d'éthyne sous la pression de 1 atm , à la température de 20°C ?

2) On fait réagir l'éthyne obtenu sur de l'eau à 80°C en

présence de H_2SO_4 et Hg^{2+} .

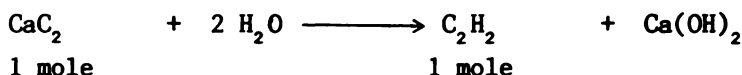
a) Ecrire l'équation de la réaction.

b) Sachant que le rendement de la réaction est 12%, quelle est la masse du composé organique obtenu ?

Données: Sous 1 atm, à 20°C , le volume molaire du gaz est 24 l ;
 $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{Ca}) = 40 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

1) L'équation de la réaction entre le carbure de calcium et l'eau s'écrit :



Une masse M de CaC_2 libère 24 l de C_2H_2

une masse m de CaC_2 libère 100 l de C_2H_2

La masse m de carbure de calcium nécessaire pour obtenir 100 l d'éthyne est :

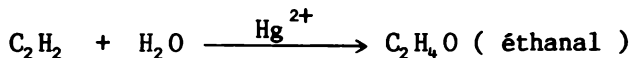
$$m = M \times \frac{100}{24}$$

La masse molaire du carbure de calcium est :

$$M = 40 + 2 \times 12 = 64 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{D'où } m = \frac{100 \times 64}{24} = 267 \text{ g}$$

2) a) L'équation de la réaction d'hydratation de l'éthyne s'écrit :



Si le rendement de la réaction était 100 %, une mole d'éthyne donnerait une mole d'éthanal.

Soit n le nombre de moles de molécules d'éthyne utilisées :

$$n = \frac{V}{V} = \frac{100}{24}$$

Soit n' le nombre de moles d'éthanal obtenues; le rendement de la réaction est:

$$R = \frac{n'}{n}$$

D'où $n' = n \cdot R$ et la masse d'éthanal obtenue est $m' = n' M'$

$m' = n \cdot R \cdot M'$ (M' étant la masse molaire moléculaire de l'éthanal : $M' = (12 \times 2) + (1 \times 4) + 16 = 44 \text{ g.mol}^{-1}$)

$$m' = \frac{100}{24} \times \frac{12}{100} \times 44 = 22 \text{ g}$$

Exercice n° 6

1) A la formule brute C_3H_4 correspondent deux isomères possibles (A) et (B) dont le premier (A) est un alcyne. Donner les formules semi-développées et les noms de (A) et (B).

2) a) L'hydrogénation partielle de (A) donne un composé (C). Donner la formule semi-développée et le nom de (C).

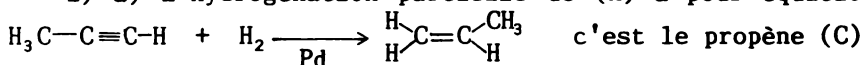
b) Ecrire l'équation de la dimérisation de (C). Donner le nom du composé (D) obtenu.

c) Qu'obtient-on par hydrogénation de (D) ?

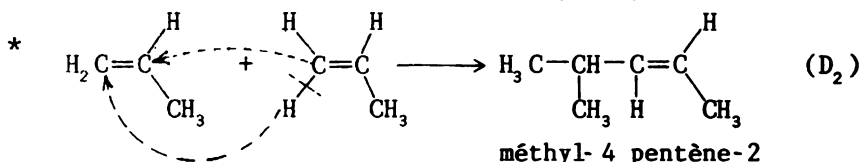
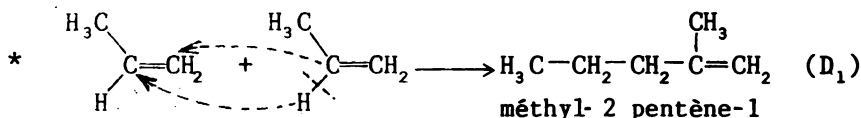
Corrigé

1) La molécule de formule brute C_3H_4 comporte deux liaisons π , on peut avoir : $H_3C-C\equiv C-H$ et $H_2C=C=CH_2$
propyne (A) propadiène (B)
(A) est un alcyne ; (B) est un alcadiène.

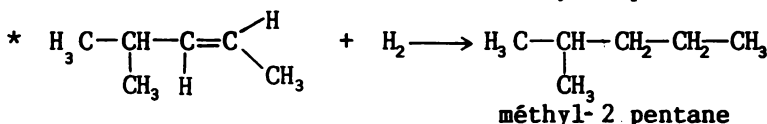
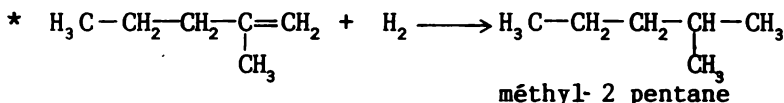
2) a) L'hydrogénation partielle de (A) a pour équation :



b) La dimérisation de (C) est la réaction d'addition de deux molécules du composé (C) l'une avec l'autre. Elle peut se faire de deux façons :



c) L'hydrogénation de (D_1) et de (D_2) se fait à $180^\circ C$ en présence de nickel (Ni) comme catalyseur :



(D_1) et (D_2) donnent le même composé par hydrogénation.

Exercice n° 7

1) Par quelle réaction peut-on préparer le dichloro-1, 2 éthène ? Ecrire l'équation de la réaction et citer les principaux changements de structure qui accompagnent cette réaction.

2) On fait l'hydrogénation du dichloro-1, 2 éthène.

a) Donner le nom et la formule semi-développée du composé (A) obtenu.

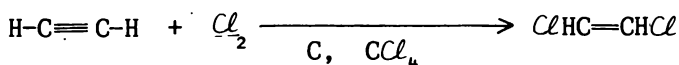
b) Quels sont les changements de structure qui accompagnent cette hydrogénation ?

c) Existe-t-il d'autres isomères de (A) ? Comment peut-on les préparer ?

Corrigé

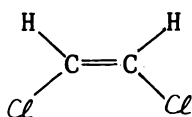
1) Le dichloro-1, 2 éthène a pour formule $ClHC=CHCl$.

On peut le préparer par addition du dichlore sur l'éthyne suivant le schéma :

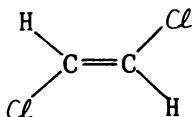


Cette réaction s'accompagne d'un changement de la structure moléculaire :

- On passe d'une molécule linéaire à une molécule plane ne possédant pas la libre rotation et pouvant se présenter sous forme de deux isomères :



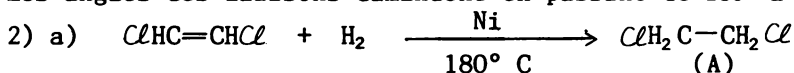
(Z)



(E)

- La longueur de la liaison carbone-carbone augmente : elle passe de 1,20 Å à 1,33 Å

- Les angles des liaisons diminuent en passant de 180° à 120°

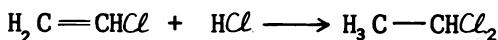
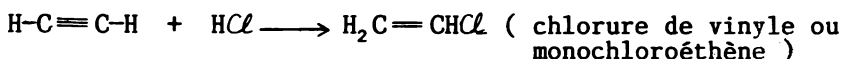


Le composé (A) est le dichloro-1, 2 éthane.

b) La molécule obtenue est spatiale, chaque carbone occupe le centre d'un tétraèdre dont les sommets sont H, H, C et Cl. La molécule obtenue possède la libre rotation, la longueur de la liaison carbone-carbone augmente (de 1,33 Å à 1,54 Å), les angles des liaisons passent de 120° à 109° 28'.

c) Il existe un autre isomère de (A): $\text{H}_3\text{C}-\text{CHCl}_2$, c'est le dichloro-1, 1 éthane.

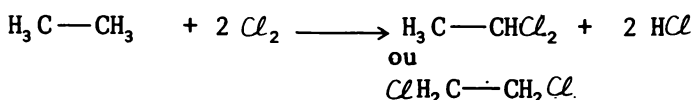
* On prépare le dichloro-1, 1 éthane par addition de HCl sur l'éthyne, la réaction peut se faire en deux étapes :



Dans la deuxième étape, l'atome de chlore se fixe sur l'atome de carbone qui porte le premier chlore.

* On peut obtenir le dichloro-1, 1 éthane par la réaction de substitution du dichlore avec l'éthane (cette réaction donne de nombreux dérivés chlorés allant du mono à l'hexachloroéthane).

Si on se limite à la formation du dichloroéthane, l'équation de la réaction s'écrit :



Exercice n° 8

Un alcyne (A) admet comme proportion en masse 8 fois plus de carbone que d'hydrogène.

1) Dédurre la formule moléculaire brute de cet alcyne (A).
2) Donner les noms et les formules semi-développées des différents isomères de (A).

3) L'hydrogénation partielle de (A) donne un composé (B) dont l'hydratation produit un seul alcool possible (C). Identifier (A), (B) et (C). Ecrire les équations des réactions de l'obtention de (B) et de (C).

4) L'hydratation de ces isomères donne un composé (D) qui donne un précipité jaune avec le D.N.P.H et qui ne réagit pas avec le réactif de Schiff. Donner la formule semi-développée de ce corps, son nom et l'équation de la réaction de sa formation.

$$M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$$

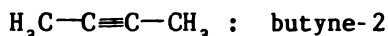
Corrigé

1) La formule moléculaire brute d'un alcyne est $C_n H_{2n-2}$.

Dans une mole de molécules d'alcyne, la masse de carbone est $m_C = 12.n$ (grammes) et la masse d'hydrogène est $m_H = 2n - 2$ (g). Or, dans l'alcyne (A), $m_C = 8m_H$ donc $12n = 8.(2n - 2) \Rightarrow n = 4$

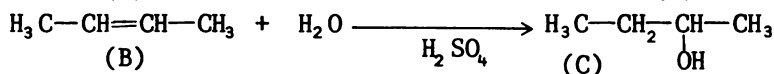
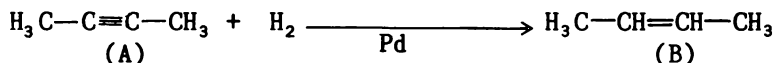
La formule brute de (A) est $C_4 H_6$.

2) Il existe deux composés répondant à cette formule brute



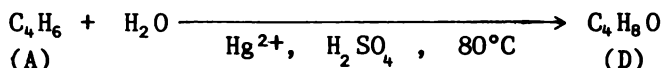
3) L'hydrogénation partielle d'un alcyne donne un alcène: celle du butyne-1 donne le butène-1 de formule $H_2C=CH-CH_2-CH_3$ et celle du butyne-2 donne le butène-2 de formule $H_3C-CH=CH-CH_3$

L'hydratation du butène-1 peut donner deux alcools selon que OH se fixe sur le premier ou le deuxième carbone. L'hydratation du butène-2, dont la molécule est symétrique, donne un seul alcool. Nous concluons de cela que (A) est le butyne-2, (B) est le butène-2. Nous déterminerons (C) après les équations.

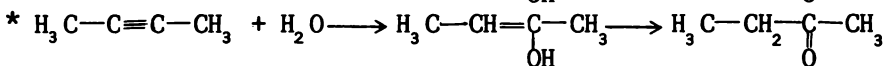
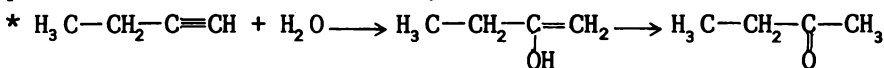


(C) est le butanol-2.

4) L'hydratation du composé (A) est l'addition de l'eau sur ce composé.



Le composé (D) donne un précipité avec le D.N.P.H et ne réagit pas avec le réactif de Schiff, donc c'est une cétone (butanone)



Les 2 butynes donnent un énol instable qui se transforme en butanone.

5- COMPOSES AROMATIQUES

Exercice n° 1

Un flacon de capacité 1l est rempli de dichlore. On introduit dans ce flacon quelques gouttes de benzène. Le flacon est ensuite exposé à une lumière vive riche en U.V.

1) Quelle réaction a lieu entre le benzène et le dichlore? Ecrire son équation. Donner le nom du produit obtenu. Quels sont les changements de structure moléculaire qui accompagnent cette réaction ?

2) Quelle masse de benzène faut-il introduire dans le flacon pour que tout le dichlore réagisse ?

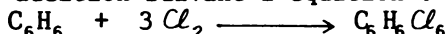
3) Quelle est la masse du produit obtenu ?

Données : Dans les conditions de l'expérience, le volume molaire du gaz est 24 litres . Les masses molaires atomiques en gramme par mole sont :

$$M(H) = 1 \quad ; \quad M(C) = 12 \quad ; \quad M(Cl) = 35,5$$

Corrigé

1) Le benzène et le dichlore réagissent en présence d'une lumière vive par addition suivant l'équation :



On obtient un solide blanc appelé l'hexachlorocyclohexane.

Les changements de structure qui accompagnent cette chloration du benzène sont :

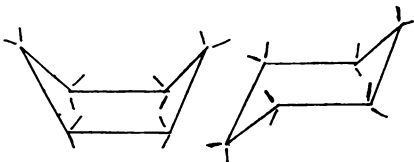
- La molécule de benzène est plane et a la forme d'un hexagone régulier. La molécule du composé obtenu a la forme d'un hexagone gauche qui peut avoir soit la forme chaise soit la forme bateau.

- La longueur de la liaison carbone-carbone augmente, elle

passse de 1,40 Å à 1,54 Å.

- L'angle valentiel passe de 120° à 109°28'.

- La molécule de benzène est rigide , celle de l'hexachlorocyclohexane possède la libre rotation.



2) D'après l'équation de la réaction, une mole de molécules de benzène réagit avec trois moles de molécules de dichlore pour donner une mole de molécules de composé chloré.

Le nombre de moles de molécules de dichlore initialement introduites est :

$$n_1 = \frac{1}{24} \text{ mole}$$

Pour que tout le dichlore réagisse, il faut introduire dans le flacon :

$$n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{72} \text{ mole de molécules de benzène.}$$

La masse de benzène à introduire est : $m = n \cdot M$ (M = masse molaire moléculaire du benzène = $(6 \times 12) + (6 \times 1) = 78 \text{ g.mol}^{-1}$)

d'où : $m = \frac{1}{72} \times 78 = 1,08 \text{ g.}$

3) La masse d'hexachlorocyclohexane obtenu est: $m' = n' \cdot M'$ (n' étant le nombre de moles du produit obtenu et M' étant la masse molaire moléculaire de ce produit).

$$M' = 6 \times (12 + 1 + 35,5) = 291 \text{ g.mol}^{-1}$$

Une mole de benzène donne une mole d'hexachlorocyclohexane,

donc : $n' = n = \frac{n_1}{3} = \frac{1}{72} \text{ mole.}$

La masse de composé obtenu est :

$$m' = \frac{1}{72} \times 291 = 4,04 \text{ g.}$$

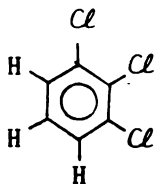
Exercice n° 2

Donner les isomères des corps suivants :

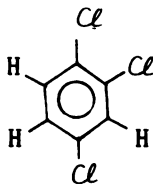
- 1) le trichlorobenzène,
- 2) le monochloronaphtalène, L
- 3) le monochlorométhylbenzène.

Corrigé

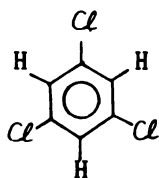
- 1) Les isomères du trichlorobenzène sont :



Trichloro-1, 2, 3
benzène

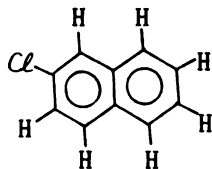
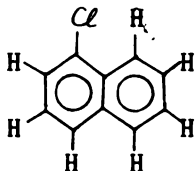


Trichloro-1, 2, 4
benzène

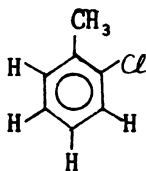


Trichloro-1, 3, 5
benzène

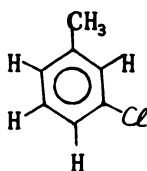
- 2) Les isomères du monochloronaphtalène sont :



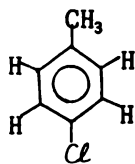
- 3) Les isomères du monochlorométhylbenzène sont :



monochloro-2
méthyl-1 benzène



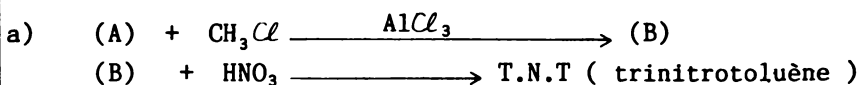
monochloro-3
méthyl-1 benzène



monochloro-4
méthyl-1 benzène

Exercice n° 3

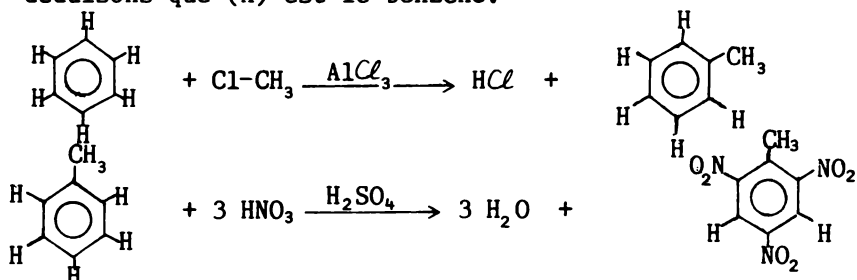
1) Compléter les équations suivantes :



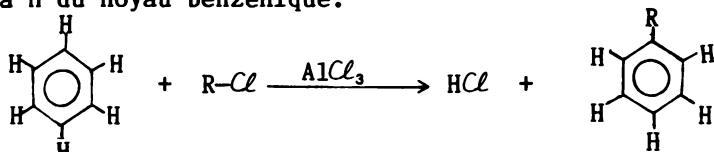
2) Si dans cette dernière réaction, R est un groupement vinylo, que donne la polymérisation de (C) ?

Corrigé .

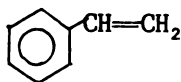
1) a) Le composé (B) qui donne le T.N.T par réaction avec l'acide nitrique est le méthylbenzène ou toluène , nous en déduisons que (A) est le benzène.



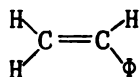
b) Cette dernière réaction est une réaction de Friedel-Crafts, au cours de laquelle on a substitution de groupement -R à H du noyau benzénique.



2) Si R est le groupement vinylo - CH=CH_2 , le composé (C) est alors le styrène de formule

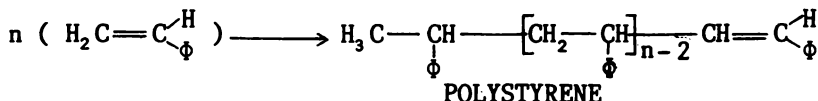


que nous écrivons



ϕ étant le noyau benzénique.

La polymérisation est l'addition de n molécules identiques.



6 - LES ALCOOOLS

Exercice n° 1

Un alcène (B) subit une hydratation en milieu acide. Il donne deux alcools (A) et (A'), l'alcool (A) est obtenu en plus grande quantité que (A'). L'oxydation ménagée est impossible pour (A) alors que (A') s'oxyde et donne un composé (C) qui rosit le réactif de Schiff.

1) Dédurre la formule de l'alcène (B) sachant que sa molécule contient 5 atomes de carbone.

2) Sachant que seulement 8 % de (B) sont transformés en (A'), calculer la masse de (B) nécessaire à la préparation de 20 g de (C).

On donne : $M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$.

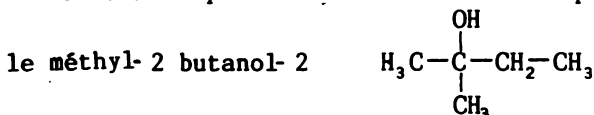
Corrigé

1) Un alcène a pour formule générale $C_n H_{2n}$; les alcènes en cinq carbones ont pour formule brute $C_5 H_{10}$.

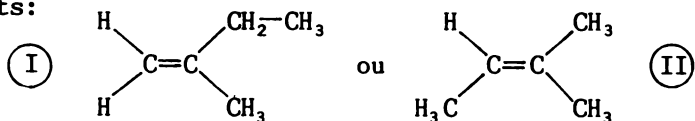
L'hydratation de (B) donne deux alcools (A) et (A').

* (A) ne s'oxyde pas, c'est un alcool tertiaire. Le carbone portant le groupement OH ne porte aucun atome d'hydrogène. Comme l'hydratation correspond seulement à l'addition d'une molécule d'eau à la molécule de l'alcène, le nombre d'atomes de carbone est le même (5) dans la molécule de l'alcène (B) et dans celle de l'alcool (A).

Le seul alcool tertiaire possible avec 5 atomes C par molécule est :



Cet alcool peut être obtenu par hydratation de l'un des deux alcènes suivants:

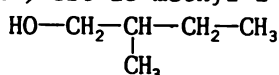


le méthyl-2 butène-1 le méthyl-2 butène-2

* (A') peut s'oxyder pour donner un aldéhyde (C), c'est donc un alcool primaire isomère de (A) et dérivant de l'un des deux alcènes précédents.

L'alcène (II) ne peut pas donner un alcool primaire par hydratation. L'alcène (B) est par conséquent le méthyl-2 butène-1, ayant la formule (I) représentée ci-dessus.

REMARQUE : L'alcool (A') est le méthyl-2 butanol-1 de formule :



$$\left. \begin{array}{l} M \text{ de } (B) \text{ renferme } 16 \text{ g d'oxygène} \\ 100 \text{ g } \quad \quad \quad \quad \quad 21,6 \text{ g } \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{16 \times 100}{21,6} = 74 \text{ g.mol}^{-1}$$

Détermination de la formule brute : La masse molaire moléculaire s'écrit en fonction de n : $M = 14n + 18 = 74$
 Nous en déduisons : $n = 4$. La formule moléculaire brute de l'alcool est : C_4H_9OH .

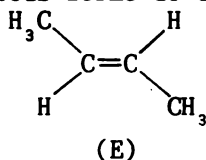
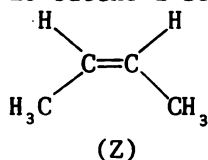
Les isomères possibles :

- * $H_3C-CH_2-CH_2-CH_2OH$ butanol-1 (alcool primaire)
- * $H_3C-CH_2-\underset{\substack{| \\ OH}}{CH}-CH_3$ butanol-2 (alcool secondaire)
- * $H_3C-\underset{\substack{| \\ CH_3}}{CH}-CH_2OH$ méthyl-2 propanol-1 (alcool primaire)
- * $H_3C-\underset{\substack{| \\ CH_3}}{\overset{\substack{| \\ CH_3}}{C}}-OH$ méthyl-2 propanol-2 (alcool tertiaire)

2) L'alcène (A) ne donne par hydratation un seul alcool que si la molécule de (A) est symétrique par rapport à la double liaison. Nous en déduisons que :

(A) a la formule $H_3C-CH=CH-CH_3$ c'est le butène-2, et l'alcool (B) est le butanol-2.

REMARQUE : Le butène-2 se présente sous forme de deux isomères



Exercice n° 3

1) Un alcène $R-CH=CH_2$ est hydraté en présence de H_2SO_4 . Quels sont les composés susceptibles d'être obtenus ?

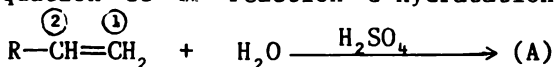
2) Pratiquement, un seul composé (A) se forme en quantité prépondérante. On fait l'oxydation ménagée d'une quantité de (A) en milieu acide, le composé obtenu (B) a pour masse molaire moléculaire $M = 58 \text{ g.mol}^{-1}$. (B) donne un précipité avec le D.N.P.H mais ne réagit pas avec le réactif de Schiff.

En déduire la nature de (A) et (B). Donner le nom et la formule semi-développée de chacun d'eux.

On donne : $M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

1) L'équation de la réaction d'hydratation de l'alcène s'écrit :

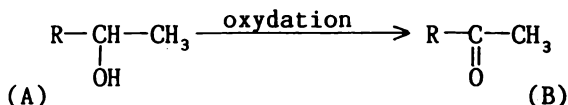


* Si OH se fixe sur le carbone $\textcircled{1}$ situé au bout de la chaîne, on obtient un alcool primaire de formule $R-CH_2-CH_2OH$

* Si OH se fixe sur le carbone $\textcircled{2}$, on obtient un alcool secon-

daire de formule
$$\begin{array}{c} \text{R}-\text{CH}-\text{CH}_3 \\ | \\ \text{OH} \end{array}$$

2) L'oxydation ménagée d'un alcool donne soit un aldéhyde soit une cétone. Or (B) ne réagit pas avec le réactif de Schiff donc (B) est une cétone et (A) est un alcool secondaire. L'équation de la réaction d'oxydation de (A) s'écrit :

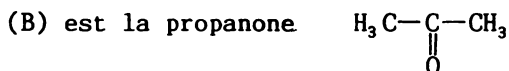
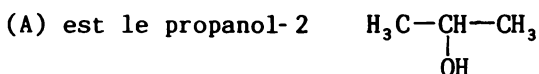


(- R étant un groupement alkyle - $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}$).

La masse molaire moléculaire de (B) est $M_B = 58 \text{ g.mol}^{-1}$

$$M_B = (12n + 2n + 1) + (24 + 16 + 3) = 58 \Rightarrow n = 1$$

- R est le groupement méthyle - CH_3 .



Exercice n° 4

La combustion complète par le dioxygène de 0,1 mole d'un monoalcool saturé (A) donne 6,72 l de gaz carbonique (volume ramené aux conditions normales de température et de pression) et 7,2 g d'eau. (l'alcool est aliphatique, non cyclique).

1) a) Ecrire l'équation de la combustion de (A). En déduire la formule moléculaire brute de cet alcool.

b) Donner la formule semi-développée et le nom de chacun des alcools isomères de (A).

2) Ecrire l'équation de la réaction d'oxydation ménagée de chacun des isomères trouvés.

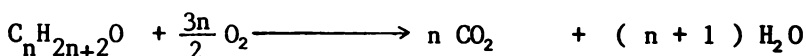
3) a) On peut obtenir (A) par hydratation d'un alcène. Lequel ?

b) Préciser si cette hydratation conduit à un seul ou à plusieurs isomères.

On donne : volume molaire du gaz dans les conditions normales de température et de pression : $V = 22,4 \text{ l}$.

Corrigé

1) a) La formule brute d'un monoalcool aliphatique saturé s'écrit : $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}$; l'équation de la combustion est :



1 mole $\qquad \qquad \qquad n \text{ moles} \qquad \qquad (n+1) \text{ moles}$

1 mole $\qquad \qquad \qquad n V \qquad \qquad (n+1) \times 18 \text{ g}$

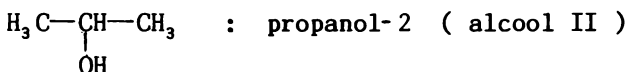
0,1 mole $\qquad \qquad \qquad 6,72 \text{ l} \qquad \qquad (n+1) \times 1,8 \text{ g} = 7,2 \text{ g}$

(avec $V = 22,4 \text{ l}$ et $M(\text{H}_2\text{O}) = 2 \times 1 + 16 = 18 \text{ g.mol}^{-1}$)

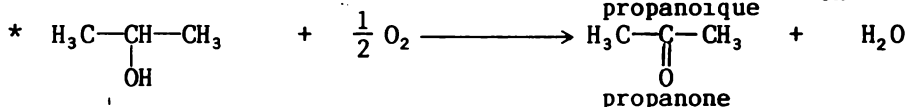
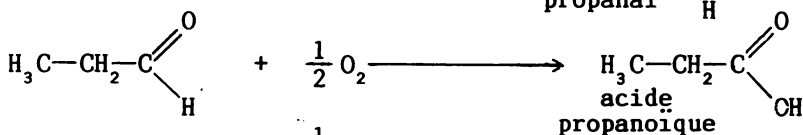
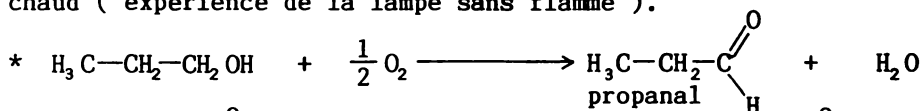
Nous remarquons que $1,8 (n + 1) = 7,2 \implies n = 3$

La formule moléculaire brute de l'alcool (A) est C_3H_8O .

b) Deux isomères correspondent à la formule C_3H_8O contenant le groupement OH :

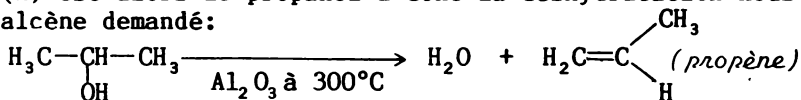


2) Il existe de nombreuses méthodes pour réaliser l'oxydation ménagée des alcools primaires et secondaires. Choisissons celle qui utilise le dioxygène de l'air en présence de cuivre chaud (expérience de la lampe sans flamme).



Si l'oxydation ménagée n'est pas réalisée par le dioxygène de l'air, on peut se contenter de mettre les formules de l'alcool, de l'aldéhyde, de la cétone ou de l'acide correctement de part et d'autre de la flèche, avec le mot "oxydation" au-dessus de cette flèche. Une écriture beaucoup plus complète et plus difficile ferait appel aux couples rédox.

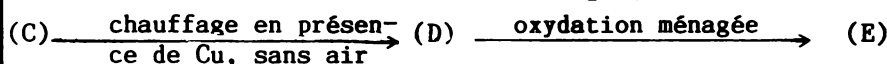
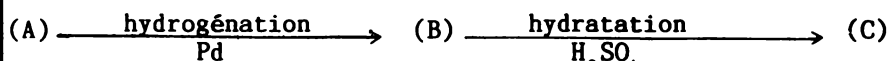
3) a) Puisque (A) peut être obtenu par hydratation d'un alcène, (A) est alors le propanol-2 dont la déshydratation nous donne l'alcène demandé:



b) L'hydratation du propène peut conduire à 2 alcools, (voir exercice n° 2), mais le propanol-2 est obtenu en quantité très prépondérante.

Exercice n° 5

Soit la série de réactions suivantes :



(A) et (B) sont deux hydrocarbures insaturés à deux carbones.

1) Identifier les corps (A), (B), (C), (D) et (E).

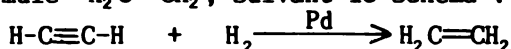
2) Ecrire l'équation de la réaction de (C) avec (A).

Donner la formule semi-développée et le nom du corps obtenu grâce à cette dernière réaction.

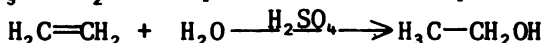
Corrigé

1) * (A) est l'éthyne (ou acétylène) de formule $\text{H}-\text{C}\equiv\text{C}-\text{H}$

* En présence de palladium (Pd), catalyseur peu actif, l'hydrogénation de (A) est partielle, elle donne l'éthène (ou éthyène), de formule $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$, suivant le schéma :

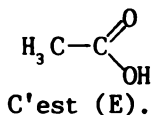


* L'hydratation de l'éthène donne un alcool qui est l'éthanol de formule $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2\text{OH}$ et qui est un alcool primaire :



* Le chauffage de l'éthanol (C) en présence de Cu, à l'abri de l'air est une déshydrogénation, c'est donc une oxydation ménagée qui s'arrête à l'étape donnant un aldéhyde (D), il s'agit de l'éthanal ou aldéhyde acétique de formule $\text{H}_3\text{C}-\overset{\text{H}}{\underset{\text{O}}{\text{C}}}$

* L'oxydation ménagée de l'éthanal donne un acide carboxylique qui est l'acide éthanique ou acide acétique de formule :



2) La réaction d'un alcool avec un acide est une estérification



L'ester obtenu est l'éthanoate d'éthyle.

Exercice n° 6

1) Le propanal et la propanone sont deux isomères de formule $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$.

a) Donner leurs formules semi-développées.

b) Comment peut-on expérimentalement les différencier ?

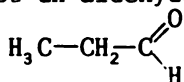
c) Chacun de ces corps peut être obtenu à partir d'un alcool. Donner dans chaque cas le nom, la formule semi-développée et la classe de l'alcool.

2) L'un des deux composés peut être obtenu par hydratation d'un alcyne, lequel ? Donner le nom et la formule semi-développée de cet alcyne.

3) L'oxydation du propanal donne un composé (A) qui réagit avec un composé organique (B) pour donner un composé (C) de formule $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\overset{\text{O}}{\underset{\text{O}-\text{CH}_3}{\text{C}}}$. Donner le nom et la fonction de (A), (B) et (C).

Corrigé

1) a) Le propanal est un aldéhyde, sa formule est :



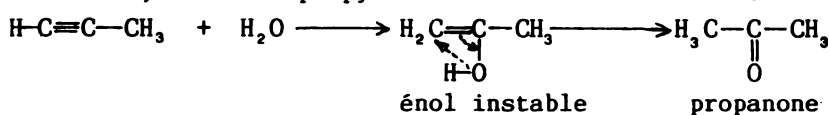
La propanone est une cétone de formule $\text{CH}_3\text{--}\overset{\text{O}}{\underset{\text{||}}{\text{C}}}\text{--CH}_3$.

b) On peut les différencier par le réactif de Schiff qui rosit avec le propanal (comme avec tout aldéhyde) et qui reste incolore avec la propanone (comme avec toute cétone). Rappelons qu'aldéhydes et cétones donnent des précipités jaunes avec le D.N.P.H.

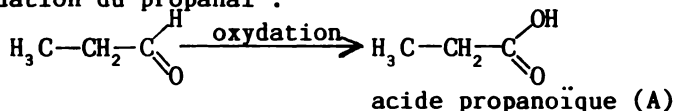
c) Le propanal est obtenu par oxydation ménagée du propanol-1 (alcool I) de formule $\text{H}_3\text{C--CH}_2\text{--CH}_2\text{OH}$

La propanone est obtenue par oxydation ménagée du propanol-2 (alcool II) de formule $\text{H}_3\text{C--}\overset{\text{OH}}{\underset{|}{\text{CH}}}\text{--CH}_3$

2) L'hydratation d'un alcyne donne une cétone sans changement du nombre d'atomes de carbone. L'alcyne possède 3 atomes C par molécule, c'est le propyne de formule $\text{H--C}\equiv\text{C--CH}$.



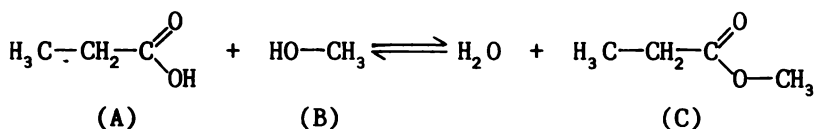
3) Oxydation du propanal :



La réaction de l'acide carboxylique (A) avec le composé (B) donne le corps (C) dont la formule semi-développée montre qu'il s'agit d'un ester, donc (B) est un alcool.

En comparant la formule de (A) et de (C), on conclut que (B) est le méthanol de formule CH_3OH (alcool I).

(C) est le propanoate de méthyle. L'équation de la réaction s'écrit :



7-

LES ACIDES CARBOXYLIQUES

Exercice n° 1

Un acide carboxylique à chaîne aliphatique saturée contient 31,37 % en masse d'oxygène.

1) Déterminer la formule brute de l'acide considéré.

2) Donner les formules semi-développées et les noms des différents acides isomères ayant la formule brute trouvée au 1)

On donne : $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

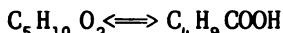
1) La formule générale de l'acide carboxylique est $R\text{-COOH}$; R est un groupement alkyle $-C_nH_{2n'+1}$. La formule de l'acide peut s'écrire $C_nH_{2n'+1}COOH$, et la formule brute sera $C_nH_{2n}O_2$, avec $n = n' + 1$.

Une mole de molécules d'acide carboxylique contient 2 moles d'atomes d'oxygène, soit 32 g d'oxygène. La masse molaire moléculaire de l'acide considéré est donc :

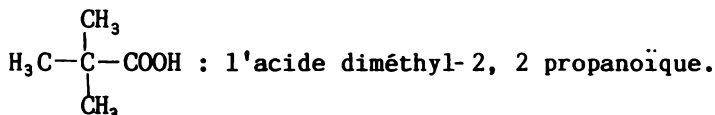
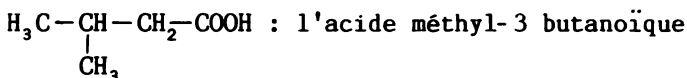
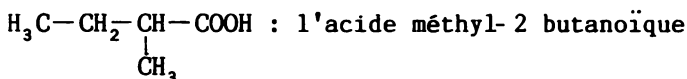
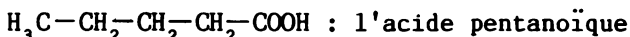
$$M = \frac{32 \times 100}{31,37} = 102 \text{ g.mol}^{-1}$$

Or $M = 12n + 2n + 32 = 14n + 32$, donc $14n + 32 = 102$

On en déduit $n = 5$: la formule moléculaire brute est :



2) Les différents acides isomères de formule $C_5H_{10}O_2$:



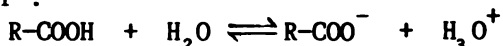
Exercice n° 2

Pour déterminer la masse molaire moléculaire d'un acide carboxylique, on dissout 2,20 g de cet acide dans l'eau, on ajoute quelques gouttes de phénolphtaléine et on y verse à la burette une solution de soude à $1,25 \text{ mol.l}^{-1}$. Le virage de la phthaléine est obtenu lorsqu'on a versé 20 cm^3 de la solution aqueuse de soude.

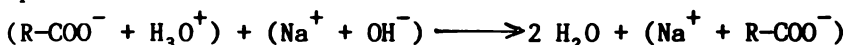
- 1) Ecrire l'équation de la réaction de neutralisation.
- 2) Calculer la masse molaire moléculaire de l'acide.
- 3) En déduire la formule brute de l'acide.
- 4) Donner les formules semi-développées et les noms des différents acides isomères ayant la formule brute trouvée au 3)
- 5) Ces acides peuvent être obtenus par oxydation ménagée de certains alcools. Donner pour chaque acide, le nom, la formule semi-développée et la classe de l'alcool correspondant

Corrigé

1) La dissolution de l'acide carboxylique dans l'eau est schématisée par :



L'équation de la réaction de neutralisation s'écrit :



2) Une mole d'ions OH^- neutralise une mole d'ions H_3O^+ , ce qui correspond à une mole d'acide $\Rightarrow$ Le nombre de moles d'ions H_3O^+ neutralisés est égal au nombre de moles d'ions OH^- apportés par le volume V_B de solution de soude, versé à l'équivalence, et provoquant le virage de la phénolphtaléine.

Ce nombre est : $x = C_B \cdot V_B = 1,25 \times 20 \times 10^{-3} = 2,5 \times 10^{-2}$ mole.

Nous concluons que le volume de la solution acide utilisée a été obtenu en dissolvant $2,5 \times 10^{-2}$ mole d'acide dans l'eau.

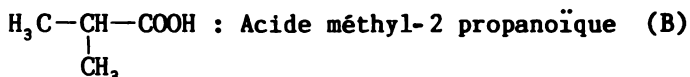
Donc $2,5 \times 10^{-2}$ mole d'acide a pour masse $m = 2,2$ g

1 mole d'acide a pour masse M

$$M = \frac{2,2 \times 1}{0,025} = 88 \text{ g.mol}^{-1}$$

3) La formule brute de l'acide est $C_n H_{2n+1} COOH$. On a donc :
 $M = 12n + 2n + 2 + 12 + 32 = 88 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow C_3 H_7 COOH$

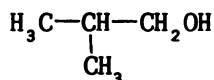
4) Acides carboxyliques ayant la formule brute précédente:



5) Les alcools qui donnent des acides carboxyliques par oxydation ménagée sont des alcools primaires.

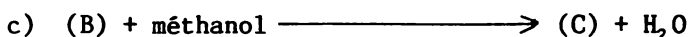
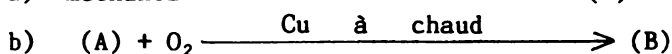
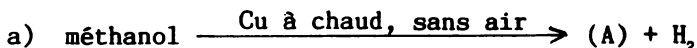
(A) est obtenu à partir du butanol-1 $H_3C-CH_2-CH_2-CH_2OH$

(B) est obtenu à partir du méthyl-2 propanol-1, de formule :



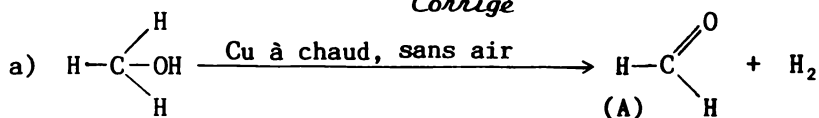
Exercice n° 3

Identifier les corps (A), (B) et (C) dans les réactions suivantes :

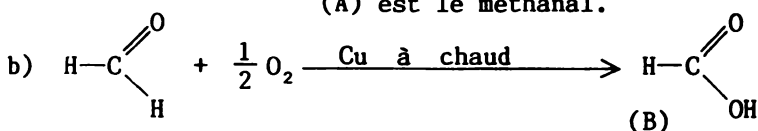


Quelles sont les propriétés de cette dernière réaction ?

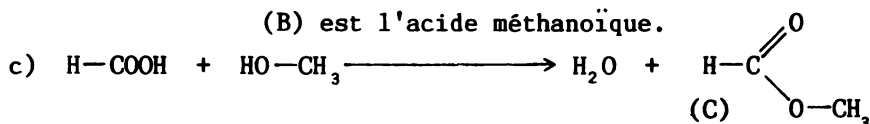
Corrigé



(A) est le méthanal.



(B) est l'acide méthanoïque.



(C) est le méthanoate de méthyle.

Cette réaction est une estérification; elle est lente, athermique et limitée.

Exercice n° 4

Soit un acide carboxylique (A) à chaîne saturée R-COOH.

1) Si on désigne par n le nombre d'atomes de carbone contenus dans le groupement alkyle -R fixé au groupement carboxyle, exprimer en fonction de n la formule générale de cet acide.

2) L'acide (A) réagit avec le méthanol.

a) Ecrire l'équation de la réaction.

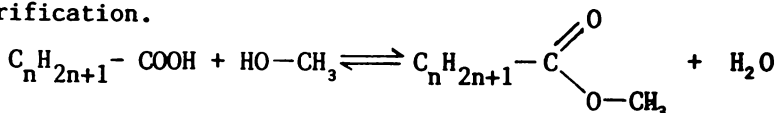
b) Sachant que la masse molaire moléculaire de l'ester obtenu est $M = 88 \text{ g.mol}^{-1}$, quels sont les formules semi-développées et les noms de (A) et de l'ester ?

On donne : $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

Corrigé

1) La formule générale d'un acide carboxylique est R-COOH. Si n est le nombre d'atomes de carbone dans le groupement -R (alkyle), la formule de l'acide sera : C_nH_{2n+1}-COOH

2) a) La réaction de l'acide avec le méthanol est une estérification.



Le composé obtenu est un ester.

b) la masse molaire moléculaire de l'ester en fonction de n s'écrit : $M = 12n + 2n + 4 + 2 \times 12 + 2 \times 16 = 14n + 60$
 Or $M = 88 \text{ g.mol}^{-1}$, donc $14n + 60 = 88 \implies n = 2$.

L'ester a pour formule $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\text{C} \begin{smallmatrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O}-\text{CH}_3 \end{smallmatrix}$, c'est le propanoate de méthyle.

L'acide (A) est l'acide propanoïque $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\text{C} \begin{smallmatrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{OH} \end{smallmatrix}$

Exercice n° 5

1) (A) est un composé organique de formule $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$. Il donne un précipité avec le D.N.P.H et agit sur le réactif de Schiff en le rosissant. Sachant que sa chaîne est linéaire, déterminer la formule semi-développée de (A) et donner son nom.

2) Le composé (A) réagit avec le dioxygène en présence de cuivre à chaud, on obtient un corps (B). Donner la formule semi-développée et le nom de (B).

3) (B) réagit avec un alcool (C) pour donner un corps (D) de masse molaire moléculaire $M = 116 \text{ g.mol}^{-1}$ et de l'eau.

a) Ecrire l'équation de la réaction.

b) Quels sont les formules semi-développées et les noms de (C) et (D) ?

4) (B) agit sur le pentachlorure de phosphore PCl_5 pour donner (E).

Ecrire l'équation de cette réaction, donner la formule et le nom de (E).

On donne : $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$

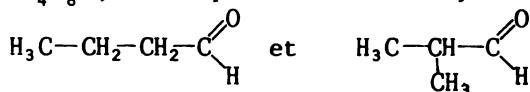
Corrigé

1) Le groupement carbonyle >C=O des aldéhydes et des cétones est caractérisé expérimentalement par un précipité jaune que donnent ces composés avec le D.N.P.H.

Puisque le composé (A) donne un précipité avec le D.N.P.H, il possède le groupement carbonyle, et puisqu'il agit sur le réactif de Schiff, alors (A) est un aldéhyde de formule

générale $\text{R}-\text{C} \begin{smallmatrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{H} \end{smallmatrix}$.

A la formule $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$, correspondent les aldéhydes :

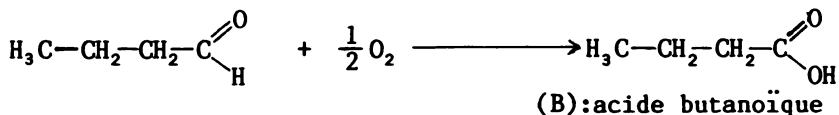


le butanal

le méthyl 2 propanal

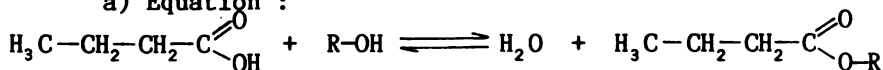
Puisque (A) possède une chaîne linéaire, c'est donc le butanal.

2) La réaction d'un aldéhyde avec le dioxygène en présence de cuivre à chaud est une oxydation ménagée donnant un acide carboxylique. Pour (A), cette réaction a pour équation :



3) La réaction de l'acide (B) avec un alcool est une estérification.

a) Equation :



(R-OH étant la formule générale d'un alcool).

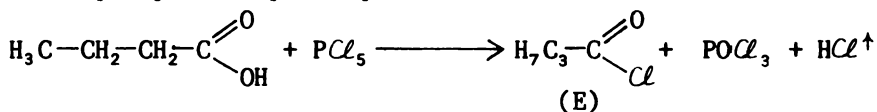
b) -R est un groupement alkyle ($-\text{C}_{n-1}\text{H}_{2n-1}$), la masse molaire moléculaire de l'ester s'écrit en fonction de n :

$$M = (n + 4) \times 12 + (2n + 1 + 7) \times 1 + 2 \times 16 = 14n + 88$$

$$\text{Or } M = 116 \text{ g.mol}^{-1}, \text{ donc } 14n + 88 = 116 \implies n = 2$$

- R = - C₂H₅ ; l'alcool (C) est l'éthanol H₃C-CH₂OH et l'ester (C) est le butanoate d'éthyle.

4) La réaction de l'acide butanoïque avec le pentachlorure de phosphore a pour équation :



(E) est le chlorure de butanoyle.

Exercice n° 6

1) Montrer que la formule C₂H₄O₂ peut correspondre soit à un acide carboxylique (A), soit à un ester (E). Donner les formules semi-développées et les noms de l'acide (A) et de l'ester (E).

2) Ecrire l'équation de la réaction d'hydrolyse de (E). Quels sont les corps obtenus ?

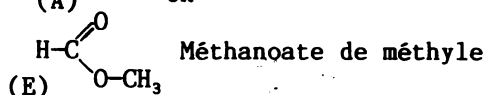
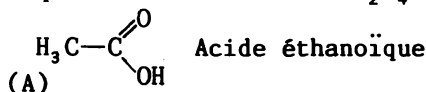
3) A partir de quel alcool peut-on obtenir l'acide (A) ? Ecrire l'équation de la réaction.

Corrigé

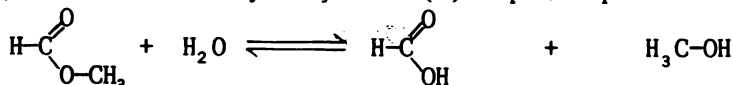
1) A la formule $\text{R}-\overset{\text{O}}{\underset{\text{O-R}'}{\text{C}}}$ peut correspondre :

- soit un acide carboxylique, si R' = H ,
- soit un ester, si R' ≠ H et R' = groupement alkyle.

Nous en déduisons qu'à la formule brute C₂H₄O₂, correspondent :

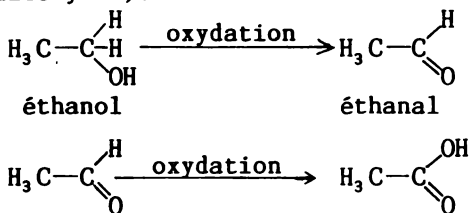


2) La réaction d'hydrolyse de (E) a pour équation :



On obtient l'acide méthanoïque H-COOH et le méthanol $\text{H}_3\text{C-OH}$.

3) L'acide éthanöïque est obtenu par oxydation ménagée de l'éthanol. La réaction peut se faire en deux étapes en passant par l'éthanal (aldéhyde).



Exercice n° 7

1) A la formule brute $C_4H_8O_2$, correspondent 4 esters possibles. Donner leurs formules semi-développées et leurs noms.

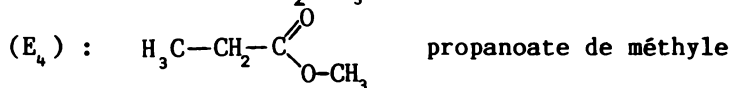
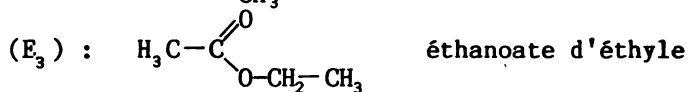
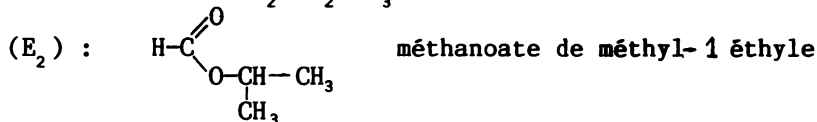
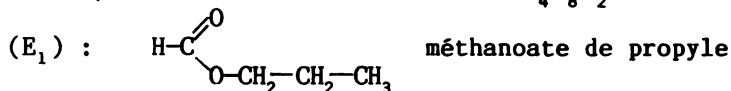
2) L'hydrolyse de l'un de ces 4 esters donne un acide (A) et un alcool (B). L'oxydation ménagée de (B) donne l'acide (A).

a) Quel est l'ester utilisé ?

b) Ecrire les équations des réactions considérées.

Corrigé

1) Les esters de formule brute $C_4H_8O_2$ sont :

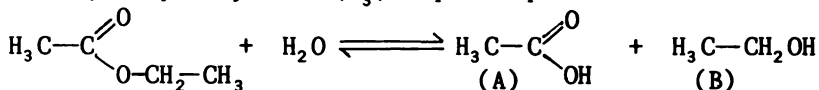


3) a) L'équation de la réaction d'hydrolyse s'écrit :

$$\text{Ester (E)} + \text{Eau} \rightleftharpoons \text{Acide (A)} + \text{Alcool (B)}$$

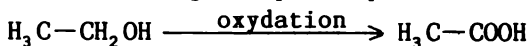
L'oxydation de (B) donne (A): ceci montre que (A) et (B) ont le même nombre d'atomes de carbone par molécule, ce nombre est 2, puisque la molécule de l'ester (E) possède 4 atomes de carbone. L'ester utilisé est donc (E_2).

b) L'hydrolyse de (E_3) a pour équation :



(B) est l'éthanol ; (A) est l'acide éthanóïque.

L'oxydation ménagée a pour équation :



8 - LES COMPOSES AZOTES

Exercice n° 1

1) Trouver les formules semi-développées, les noms et les classes des amines de formule moléculaire brute $C_4H_{11}N$.

2) Donner les formules semi-développées des acides aminés isomères de l'alanine (acide amino-2 propanoïque).

Corrigé

1) A la formule brute $C_4H_{11}N$, correspondent les amines suivantes :

a) Les amines primaires :

- | | |
|---|---|
| * $H_3C-CH_2-CH_2-CH_2-NH_2$ | butylamine ou
butanamine ou
amino-1 butane |
| * $H_3C-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{ }}{CH}-NH_2$ | méthyl-1 propylamine ou
méthyl-1 propanamine ou
amino-2 butane |
| * $H_3C-\overset{\overset{CH_3}{ }}{CH}-CH_2-NH_2$ | méthyl-2 propylamine ou
méthyl-2 propanamine ou
amino-1 méthyl-2 propane |
| * $H_3C-\overset{\overset{CH_3}{ }}{\underset{\underset{CH_3}{ }}{C}}-NH_2$ | diméthyl-1, 1 éthylamine ou
diméthyl éthanamine ou
méthyl-2 propanamine-2 |

b) Les amines secondaires :

Ce sont les amines dans lesquelles l'atome N porte un seul H.

- | | |
|---|---|
| * $H_3C-CH_2-CH_2-\overset{\overset{H}{ }}{N}-CH_3$ | N-méthyl propylamine ou
N-méthyl propanamine |
| * $H_3C-\overset{\overset{CH_3}{ }}{CH}-\overset{\overset{H}{ }}{N}-CH_3$ | N-méthyl, méthyl-1 éthylamine ou
N-méthyl propanamine-2 |
| * $H_3C-CH_2-\overset{\overset{H}{ }}{N}-CH_2-CH_3$ | diéthylamine ou
N-éthyl éthylamine |

c) Les amines tertiaires :

Ce sont les amines dans lesquelles l'atome N ne porte aucun H. Il existe une seule amine tertiaire à quatre carbones :

- | | |
|---|--------------------------|
| * $H_3C-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{ }}{\underset{\underset{CH_3}{ }}{N}}$ | N, N-diméthyl-éthylamine |
|---|--------------------------|

Nous voyons qu'il y a 8 amines de formule brute $C_4H_{11}N$.

2) L'alanine est un acide α -aminé de formule: $H_3C-\overset{\overset{NH_2}{|}}{CH}-COOH$
C'est l'acide amino 2-propanoïque.

Les isomères de l'alanine sont :

* $\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{COOH}$: acide amino-3 propanoïque

* $\text{H}_3\text{C}-\underset{\text{H}}{\underset{|}{\text{N}}}-\text{CH}_2-\text{COOH}$: acide (N-méthyl) amino-2 éthanôïque

Exercice n° 2

Un composé organique (A) a pour formule moléculaire $\text{C}_2\text{H}_7\text{N}$.

1) Ce composé peut réagir avec l'acide nitreux en donnant un dégagement de diazote et d'autres produits. Dédurre la formule semi-développée, le nom et la classe de (A).

2) Ecrire la réaction de (A) avec l'acide nitreux. Donner la formule semi-développée et la classe du composé organique obtenu.

3) Ecrire l'équation de la réaction de (A) avec l'eau; quelle variation de pH de la solution accompagne cette réaction de dissolution ? Quelle est la nature de la solution obtenue ?

Corrigé

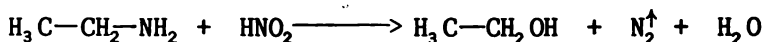
1) A la formule brute $\text{C}_2\text{H}_7\text{N}$ correspondent deux amines isomères :

(I) $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2-\text{NH}_2$ éthanamine et $\text{H}_3\text{C}-\underset{\text{H}}{\underset{|}{\text{N}}}-\text{CH}_3$ diméthylamine (II)

(I) est une amine primaire, (II) est une amine secondaire.

Puisque l'amine (A) réagit avec l'acide nitreux en donnant un dégagement de diazote, elle est une amine primaire : (A) est l'éthanamine (ou éthylamine ou amino-léthane).

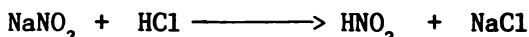
2) La réaction de l'acide nitreux avec l'éthanamine a pour équation :



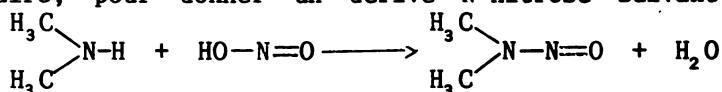
Le composé organique obtenu , dont la formule semi-développée est $\text{H}_3\text{C}-\text{CH}_2\text{OH}$, est l'éthanol ; c'est un alcool primaire.

* REMARQUES :

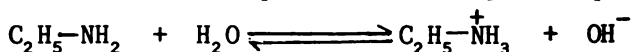
- L'acide nitreux est instable, sa préparation se fait par la réaction d'une solution concentrée d'acide chlorhydrique avec le nitrite de sodium suivant l'équation :



- L'acide nitreux réagit avec la diéthylamine, qui est une amine secondaire, pour donner un dérivé N-nitrosé suivant l'équation :



3) L'éthylamine est très soluble dans l'eau. Sa dissolution est une réaction chimique schématisée par l'équation :



L'ion positif obtenu est l'ion éthylammonium.

L'éthylamine est une base faible, sa dissolution dans l'eau est partielle.

Etudions la variation du pH de la solution : Avant la dissolution, dans l'eau, la concentration en ions hydronium H_3O^+ est égale à celle des ions hydroxyde OH^- : $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{eau}} = [\text{OH}^-]_{\text{eau}}$; Au cours de la dissolution, il y a formation d'ions hydroxyde OH^- , donc la concentration en ions OH^- augmente. Comme le produit ionique de l'eau est constant (à température constante, on suppose que la solution obtenue a la même température que l'eau utilisée comme solvant), on peut écrire :

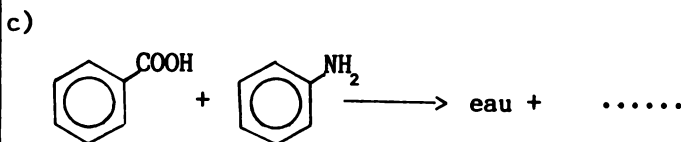
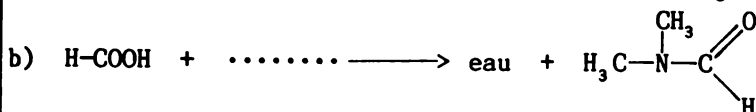
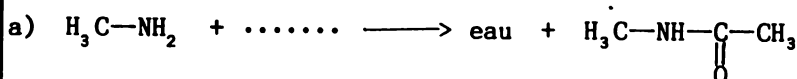
$$[\text{H}_3\text{O}^+]_s \cdot [\text{OH}^-]_s = [\text{H}_3\text{O}^+]_e \cdot [\text{OH}^-]_e \quad (e = \text{eau}; s = \text{solution})$$

Or $[\text{OH}^-]_s > [\text{OH}^-]_e$ donc $[\text{H}_3\text{O}^+]_s < [\text{H}_3\text{O}^+]_e$. Le pH se définit par la relation $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$, alors $10^{-\text{pH}_s} < 10^{-\text{pH}_e}$, d'où :

$\text{pH}_s > \text{pH}_e$: Le pH augmente au cours de la dissolution de l'éthylamine dans l'eau; le pH de la solution aqueuse d'éthylamine est supérieur à celui de l'eau, la solution obtenue est une solution BASIQUE.

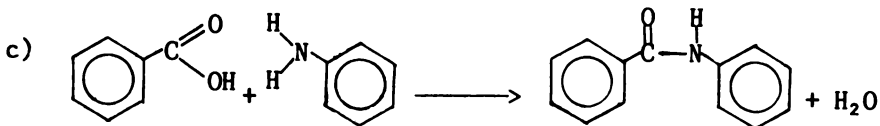
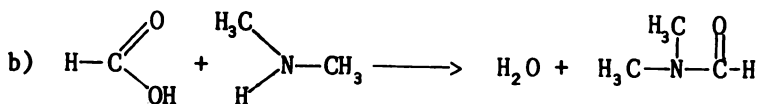
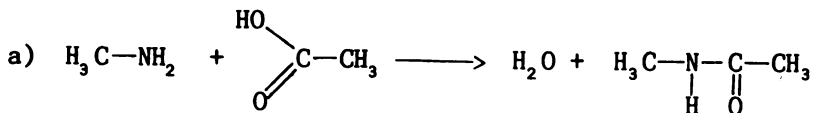
Exercice n° 3

Compléter les équations suivantes :



Corrigé

Les équations sont :



Exercice n° 4 (Bac Lettres 1988)

On dispose de trois composés organiques de formules brutes $C_3H_6O_2$, C_3H_8O et C_3H_9N , appelés respectivement (A), (B) et (C).

1) a) Qu'appelle-t-on isomères ?

b) Ecrire les formules semi-développées possibles des différents isomères de chacun des corps (A), (B) et (C) en précisant la fonction, le nom et la classe de chacun d'eux. (*)

2) Le composé (A) est soluble dans l'eau, la solution aqueuse obtenue fait virer le bleu de bromothymol (B.B.T) du vert au jaune. Préciser la nature de (A).

3) Le corps (A) peut être préparé à partir de l'un des isomères du corps (C).

a) Préciser l'isomère de (C) qu'on doit utiliser.

b) Par quelles réactions est menée cette opération? Ecrire les équations chimiques correspondant à ces réactions.

4) On fait agir le corps (A) sur le corps (B).

a) De quelle réaction s'agit-il ? Préciser ses caractères.

b) Ecrire les équations chimiques traduisant la réactions de (A) sur les différents isomères du corps (B).

(*) : Pour (B), considérer seulement les alcools.

Corrigé

1) a) On appelle isomères des composés ayant la même formule brute et des formules développées différentes.

b) Déterminons les isomères de (A), (B) et (C) :

* (A) : $C_3H_6O_2$

$H_3C-CH_2-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-OH$ acide propanoïque (fonction acide carboxylique)

$H_3C-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-O-CH_3$ éthanoate de méthyle (fonction ester)

$H-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-O-CH_2-CH_3$ méthanoate d'éthyle (fonction ester)

* (B) : C_3H_8O

$H_3C-CH_2-\overset{\overset{OH}{\mid}}{C}-H$ propanol-1 (fonction alcool primaire)

$H_3C-\underset{\underset{OH}{\mid}}{CH}-CH_3$ propanol-2 (fonction alcool secondaire)

* (C) : C_3H_9N

$H_3C-CH_2-CH_2-NH_2$ propylamine (fonction amine , classe I)

$H_3C-\underset{\underset{CH_3}{\mid}}{CH}-NH_2$ méthyl-1 éthylamine (amine I)

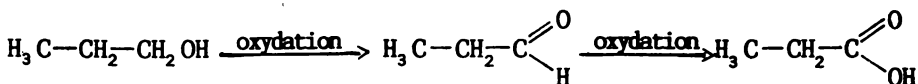
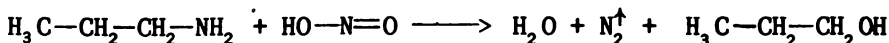
$H_3C-CH_2-NH-CH_3$ éthyl méthylamine (amine II)

$H_3C-\underset{\underset{CH_3}{\mid}}{N}-CH_3$ triméthylamine (amine III)

2) Puisque la solution aqueuse de (A) jaunit le B.B.T, alors (A) est un acide : c'est l'acide propanoïque.

3) a) L'acide propanoïque peut être préparé par oxydation ménagée du propanol-1 (alcool I) qui peut être obtenu par action de l'acide nitreux sur une amine I (la propylamine).

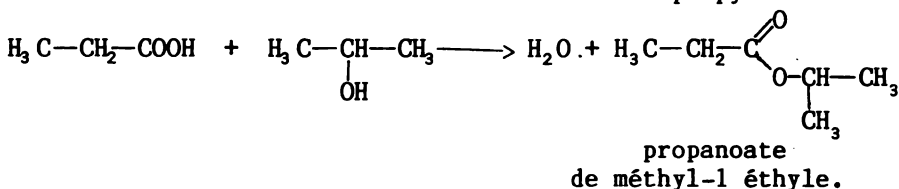
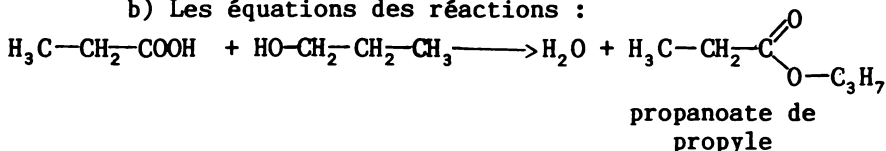
b) Equations des réactions successives :



L'oxydation peut se faire par le dioxygène en présence de cuivre ou de platine chauffés , ou par de nombreux autres oxydants tel que le permanganate de potassium en milieu acide, le trioxyde de chrome, etc ...

4) a) La réaction d'un acide avec un alcool est une estérification. Elle est athermique, lente et limitée.

b) Les équations des réactions :



Exercice n° 5 (Diplôme de Technicien 1988)

L'analyse quantitative d'une masse $m = 30 \text{ g}$ d'une monoamine (X) donne $5,8 \text{ g}$ d'azote.

1) Déterminer la formule brute et la masse molaire moléculaire de cette amine.

2) Donner la formule semi-développée, le nom et la classe de chacun des isomères correspondants.

3) L'action du sodium sur (X) donne un dérivé sodé; cela permet-il de déterminer avec certitude la classe de (X) ?

4) L'action de l'acide nitreux sur (X) permet d'obtenir un alcool (B) et un dégagement de diazote.

a) En déduire la classe de l'amine (X).

b) Ecrire l'équation de la réaction chimique, "(en précisant le mécanisme réactionnel)" "(...)" : hors - programme

5) L'oxydation de l'alcool (B) conduit à une cétone; en déduire la formule semi-développée et le nom de l'amine (X).

6) On dissout cette amine dans l'eau pure.

a) Ecrire l'équation de la réaction de dissolution.

b) Comparer le pH de la solution obtenue avec celui d'une solution de soude de même molarité.

On donne les masses molaires atomiques suivantes (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) :
 $M(\text{H}) = 1$; $M(\text{C}) = 12$; $M(\text{N}) = 14$; $M(\text{O}) = 16$

Corrigé

1) Une mole de molécules d'une monoamine contient une mole d'atomes d'azote. Soit M la masse molaire moléculaire de la monoamine (X).

Dans M grammes de (X) il y a 14 g d'azote,

dans m grammes de (X) il y a 5,8 g d'azote

la masse molaire moléculaire de l'amine (X) est donc:

$$M = \frac{14 \times m}{5,8} = \frac{14 \times 30}{5,8}$$

La formule brute s'écrit $C_n H_{2n+3} N \implies M = 14n + 17$ } $\implies n = 4$

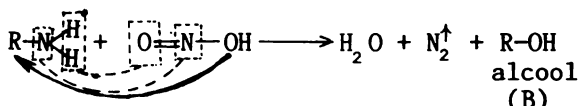
La formule brute de l'amine (X) est $C_4 H_{11} N$

2) Il existe 8 isomères (4 primaires, 3 secondaires et 1 tertiaire) : voir l'exercice n° 1 de ce chapitre.

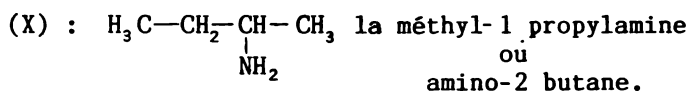
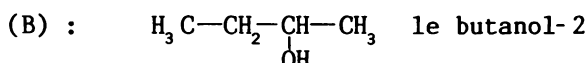
3) Puisque l'amine agit sur le sodium en donnant un dérivé sodé, elle n'est pas tertiaire. On ne peut pas cependant savoir si elle est primaire ou secondaire en se limitant à cette réaction avec le sodium.

4) a) L'obtention d'un alcool par la réaction de l'amine (X) avec l'acide nitreux prouve que cette amine est primaire.

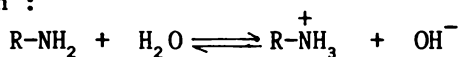
b) Le mécanisme réactionnel n'étant pas au programme, on peut écrire une équation non détaillée :



5) L'alcool (B) donne une cétone par oxydation, donc c'est un alcool secondaire. Nous en déduisons que :



6) a) La dissolution de l'amine dans l'eau s'accompagne d'une ionisation :



b) Cette dissolution est partielle, l'amine étant une base faible.

La soude est une base forte, elle est complètement ionisée. Désignons par S la solution aqueuse de l'amine (X) et par S' la solution aqueuse de soude (S et S' ont la même molarité C).

On a $[\text{OH}^-]_{\text{S}'} = \text{molarité C}$ et $[\text{OH}^-]_{\text{S}} < \text{molarité C}$; donc :

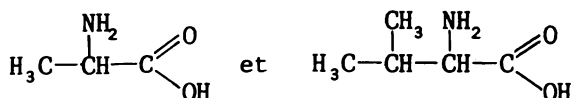
$$[\text{OH}^-]_{\text{S}'} > [\text{OH}^-]_{\text{S}} . \text{ Or } K_e = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = \text{constante, d'où :}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{S}'} < [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{S}} \implies 10^{-\text{pHS}'} < 10^{-\text{pHS}} \implies \text{pHS} < \text{pHS}' .$$

Une solution d'amine a un pH plus petit qu'une solution de soude de même molarité.

Exercice n° 6

L'alanine et la valine sont deux acides aminés de formules respectives :



1) Donner les noms de ces deux acides aminés dans la nomenclature systématique.

2) Ecrire la formule de l'ion dipolaire présent dans une solution aqueuse de chacun de ces deux acides aminés.

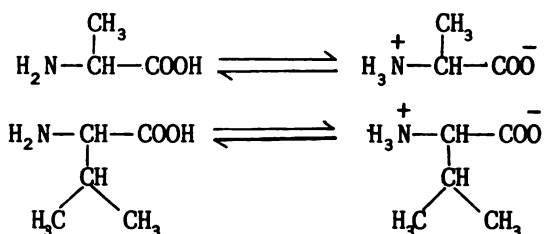
3) Ecrire les équations des réactions de condensation entre une molécule d'alanine et une molécule de valine.

Comment appelle-t-on la liaison créée et le type de molécule obtenue ?

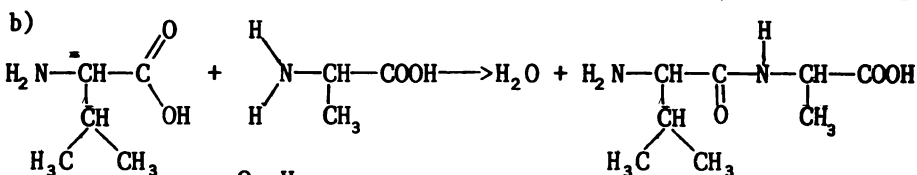
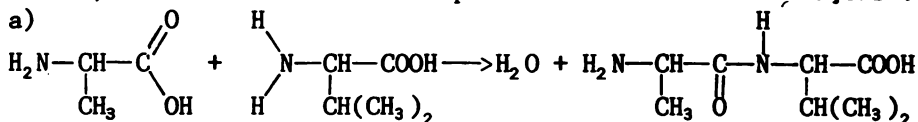
Corrigé

1) L'alanine est l'acide α -amino propanoïque.
La valine est l'acide méthyl-3 α -amino butanoïque.

2) a) En solution aqueuse, chacun des deux acides aminés est en équilibre avec son ion dipolaire :



3) La condensation mixte peut se faire de deux façons :



La liaison $\text{—}\overset{\text{O}}{\underset{||}{\text{C}}}\text{—}\overset{\text{H}}{\underset{|}{\text{N}}}\text{—}$ est la liaison peptidique.

Les molécules obtenues sont des amides appelées peptides.

Exercice n° 7

La glycine est un acide α -aminé de formule $\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{COOH}$.

1) Donner le nom de la glycine dans la nomenclature officielle.

2) En solution dans l'eau, la glycine est sous forme d'ion.

- a) Donner la formule et le nom de cet ion.
b) Quels sont l'acide conjugué et la base conjuguée de cet ion ?

3) On fait la condensation, mole à mole, de la glycine et d'un autre acide α aminé (A) ne comportant que du carbone, de l'oxygène, de l'hydrogène et de l'azote.

Sachant que le composé obtenu a une masse molaire moléculaire $M = 146 \text{ g.mol}^{-1}$, donner la formule et le nom de l'acide α -aminé (A).

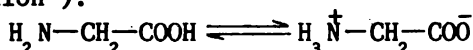
Masses molaires atomiques en g.mol^{-1} :

$M(\text{C}) = 12$; $M(\text{H}) = 1$; $M(\text{N}) = 14$; $M(\text{O}) = 16$.

Corrigé

1) La glycine est l'acide α -amino éthanoïque (ou acide α -amino acétique).

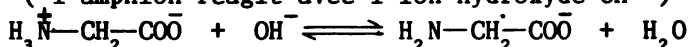
2) a) Dans l'eau, la glycine est sous forme d'un ion dipolaire (ou amphion) :



b) L'ion dipolaire a deux comportements différents suivant qu'il se trouve en milieu acide ou en milieu basique :

En milieu basique :

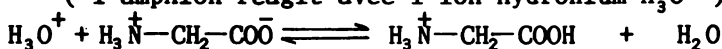
(l'amphion réagit avec l'ion hydroxyde OH^-)



L'amphion joue le rôle d'un acide dont la base conjuguée est l'ion $\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{COO}^-$.

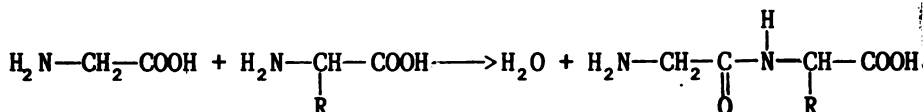
En milieu acide :

(l'amphion réagit avec l'ion hydronium H_3O^+)



L'amphion joue le rôle d'une base dont l'acide conjugué est l'ion $\text{H}_3\text{N}^+-\text{CH}_2-\text{COOH}$.

3) L'équation de la réaction de condensation de la glycine avec l'acide α -aminé (A) s'écrit :



La masse molaire moléculaire du peptide obtenu est :

$$M = 131 + M(\text{R}) = 146 \Rightarrow M(\text{R}) = 15 \text{ g.mol}^{-1} \Rightarrow -\text{R} = -\text{CH}_3$$

L'acide α -aminé (A) a pour formule : $\text{H}_3\text{C}-\underset{\text{NH}_2}{\underset{|}{\text{CH}}}-\text{COOH}$, c'est

l'acide α -amino propanoïque.